

Remerciements

Je tiens à remercier le professeur Jacqueline Sanchez-Hubert de m'avoir proposé un sujet de thèse très intéressant, un financement pour réaliser ce travail dans de très bonnes conditions et d'avoir su me faire confiance pour mener à bien cette thèse. Je lui en suis d'autant plus reconnaissant qu'elle m'a laissé une très grande liberté de travail aussi bien dans la conception que dans l'orientation de ma réflexion tout en me conseillant et en veillant à ce que je ne me disperse pas trop.

Les professeurs Michel Bernadou et Francisco José Palma, ont eu l'extrême gentillesse d'accepter d'être rapporteur. Je les remercie pour leurs efforts et leur patience.

Que soit remercié Monsieur Sanchez-Palencia de faire partie de mon jury, d'avoir eu la patience de m'écouter et surtout, de lire mes deux articles de les annoter et d'accepter de les soumettre.

Je voudrais également remercié le conseil régional de Basse-Normandie pour avoir apporté sa contribution financière dans la réalisation de ce mémoire de thèse.

Je voudrais remercier les membres du département de Mathématiques et Mécanique de de l'Université de Caen, qui m'ont permis de travailler dans de très bonnes conditions.

Je voudrais remercier tous mes amis, mais il m'est impossible de les citer tous ici, je remercie en particulier Nathalie Néré et mon frère Jean-Noël avec qui j'ai partagé de longues après-midi à la bibliothèque de l'Université de Caen à travailler,

Laurence & Nicolas Délcroix ainsi que Guy et Saucence (alias Laurence) pour les sympathiques soirées passées ensemble, Sylvain Guillou qui a assumé mes remarques ironiques voir acerbes sans trop broncher, Nathaly Barbry qui est délicieusement sympathique à mon égard et qui en dépit de ses problèmes conserve toujours le sourire et enfin, à mon complice Daniel Choï avec qui nous refaisons l'univers mathématiques (Et si on raisonnait comme ça ... ! Ça marche ? mais non ça ne marche pas ! et si on faisait comme ça ...).

Je remercie toutes les personnes du secrétariat de mathématiques pour leur disponibilité leur patience et surtout leur gentillesse. Enfin, je tiens à remercier madame Marie-Claire Vernet pour sa grande disponibilité, sa gentillesse et sa bonne humeur en toute circonstance.

Enfin, je ne pourrais pas terminer sans rendre hommage à mes parents et à mon frère. Je ne saurai jamais leur témoigner suffisamment toute ma gratitude pour m'avoir toujours soutenu.



Table des matières

Introduction	xiii
Notations et Conventions	xviii
1 Déformation des surfaces. Coques minces hyperboliques inhibées	1
1.1 Surface paramétrée. Première et seconde formes fondamentales	1
1.1.1 Première et seconde formes fondamentales	2
1.1.2 Dérivée covariante d'un vecteur	3
1.1.3 Courbes paramétrées sur une surface	4
1.1.4 Classification des surfaces	5
1.1.5 Paramétrisations spéciales des surfaces	9
1.2 Théorie classique des coques minces et leur comportement asymptotique	9
1.2.1 Comportement asymptotique lorsque $\epsilon \searrow 0$	12
1.3 Coques inhibées, Cas des surfaces uniformément hyperboliques	12
1.3.1 Problème limite réduit, Conditions limites admissibles et conti- nuité de la forme linéaire	15
2 Relation entre l'épaisseur ϵ et le pas de maillage h	25
2.1 Paraboloïde hyperbolique à forte courbure	26
2.1.1 Paraboloïde hyperbolique sous pression uniforme	30
2.1.2 Conclusion	42
2.1.3 Détermination de \mathbf{h}_o	42
2.2 Paraboloïde hyperbolique à faible courbure	44

2.2.1	Paraboloïde hyperbolique sous pression uniforme	45
2.3	Commentaires	49
2.4	Simulation numérique dans les cas d'une solution analytique	50
2.4.1	Construction d'une solution analytique et du champ de forces correspondant	50
2.4.2	Analyse et discussion sur les courbes numériques	54
2.5	Commentaire	54
2.6	Simulations numériques dans le cas où la composante normale est une distribution	58
2.6.1	Construction effective d'une solution dont la composante normale est une distribution	59
2.6.2	Analyse et commentaires	61
2.7	Conclusion	62
3	Approximation par éléments finis du problème limite réduit	67
3.1	Problème limite réduit : mise sous forme matricielle	69
3.1.1	Écriture matricielle des formes bilinéaire et linéaire	69
3.1.2	Calcul des coefficients réduits intervenant dans les décomposi- tions matricielles	70
3.2	Problème discret associé au problème limite réduit. Estimation de l'erreur	72
3.3	Approximation de la composante normale. Problème variationnel. Esti- mation de l'erreur	86
3.3.1	Formulation variationnelle de la formule de reconstruction . . .	87
3.4	Comparaison des résultats numériques et analytiques dans le cadre de la programmation du problème limite réduit	89
3.4.1	Comparaison entre les résultats du code Modulef et de la program- mation du problème limite réduit	89
3.4.2	Commentaires	102
3.5	Comportement du code quand les forces extérieures présentent des dis- continuités	105
3.5.1	Commentaires	108
3.6	Conclusion	109

4 Non réflexion de singularités dans le cas de coques membranaires hyperboliques inhibées	111
4.1 Position du problème	111
4.1.1 Étude de quelques cas tests	112
4.2 Système d'équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques du premier ordre. Problème de Cauchy	121
4.2.1 Cas d'un système hyperbolique	122
4.3 Réflexion dans les systèmes hyperboliques	128
4.4 Exploitation du théorème 4.3.1. Interprétation. Cas tests analytiques .	133
4.5 Exploitation du théorème 4.3.3. Interprétation. Cas tests analytiques .	137
4.6 Conclusion	145
Conclusion	146
Bibilographie	148
Index	151
Index terminologique	152
Index des notations	153
I Annexes	155
A Lignes de codes en C++ pour le problème limite réduit	157

Table des figures

1.1	Définition de la surface moyenne	2
1.2	Courbe C sur une surface S	4
1.3	Définition de la surface moyenne	7
1.4	Définition de la surface moyenne	8
1.5	Exemple de recherche des frontières caractéristiques et non caractéristiques	19
1.6	Visualisation de la zone d'influence des conditions aux limites entraînant l'inhibition	20
1.7	Exemples des zones inhibées pour les différentes sortes de conditions aux limites	21
2.1	Domaine maillé dans son intégralité	27
2.2	Visualisation de la coque	28
2.3	Comparaison des valeurs $u_3(M_1)$, ..., $u_3(M_4)$ en fonction du nombre de degrés de liberté et du paramètre ϵ	32
2.4	Comparaison des valeurs $u_3(N_1)$, $u_3(N_2)$ en fonction du nombre de degrés de liberté et du paramètre ϵ	33
2.5	Comparaison des valeurs $u_3(O)$ en fonction du nombre de degrés de liberté et du paramètre ϵ	34
2.6	Coupes de u_3 le long de l'axe [AB] pour différentes valeurs du paramètre ϵ et du nombre de nœuds. $K=1$, $r=2$	36
2.7	Coupes de u_3 le long de l'axe [CD] pour différentes valeurs du paramètre ϵ et du nombre de nœuds. $K=1$, $r=2$	37
2.8	Comparaison des différentes coupes le long des axes [AB] et [CD] en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ . $K=1$, $r=2$	38

2.9	Coupes de u_3 le long de l'axe [AB] pour différentes valeurs du paramètre ϵ et du nombre de nœuds. $K=5$, $r=5$	39
2.10	Coupes de u_3 le long de l'axe [CD] pour différentes valeurs du paramètre ϵ et du nombre de nœuds. $K=5$, $r=5$	40
2.11	Comparaison des différentes coupes le long des axes [AB] et [CD] en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ . $K=5$, $r=5$	41
2.12	Graphes représentatifs de $\mathbf{h} = \epsilon$ et $\mathbf{h} = \sqrt{\epsilon}$	44
2.13	Visualisation de la coque	46
2.14	Quart du domaine maillé	48
2.15	Comparaison des valeurs $u_3(A)$ en fonction du nombre de nœuds et du paramètre \mathbf{e}	49
2.16	Comparaison des valeurs u_3 le long du segment [AB] en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ pour le maillage structuré	55
2.17	Comparaison des valeurs u_3 le long du segment [CD] en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ pour le maillage structuré	55
2.18	Comparaison des valeurs u_3 le long du segment [AB] en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ pour le maillage non structuré de type Delaunay-Voronoi	56
2.19	Comparaison des valeurs u_3 le long du segment [CD] en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ pour le maillage non structuré de type Delaunay-Voronoi	56
2.20	Comparaison des valeurs u_3 en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ pour le maillage structuré	57
2.21	Comparaison des valeurs u_3 en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ pour le maillage non structuré de type Delaunay-Voronoi	57
2.22	Comparaison entre les solutions analytique et numérique : cas d'un maillage de type structuré	60
2.23	Comparaison entre les solutions analytique et numérique : cas d'un maillage non structuré de type Delaunay-Voronoi	61
2.24	Exemple de maillage structuré	64
2.25	Exemple de maillage non structuré de type Delaunay-Voronoi	65
3.1	Domaine de référence pour le parabolioïde hyperbolique.	90

3.2	Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique le long du segment [AB]	92
3.3	93
3.4	Paraboloïde hyperbolique avant déformation	94
3.5	Déformation du paraboloïde hyperbolique sous la pression uniforme . .	94
3.6	Domaine de référence pour le triangle courbe	95
3.7	Déformation de la voile sous la pression uniforme	97
3.8	Comparaison des grahes de U_3 issues de Modulef et du problème limite réduit	98
3.9	Comparaison des grahes de U_3 issues de Modulef et du problème limite réduit	99
3.10	Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique le long des segments [AB] et [CD]	102
3.11	Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique le long des segments [AB] et [CD]	102
3.12	Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique le long des segments [AB] et [CD]	103
3.13	Comparaison en norme L^2 entre la solution analytique et la solution numérique	103
3.14	Paraboloïde hyperbolique avant déformation	104
3.15	Déformation du paraboloïde hyperbolique sous l'action du champ de forces 3.99 (cf. page 100)	104
3.16	Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique le long du segment [CD] pour un maillage structuré et pour la force extérieure 3.102	107
3.17	Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique le long du segment [CD] pour un maillage non structuré et pour la force extérieure 3.102	108
4.1	Visualisation du domaine de référence.	113
4.2	Visualisation de la déformée de la coque dans le cas où la totalité de la frontière est encastée.	114
4.3	Visualisation de la déformée de la coque dans le cas où les trois-quarts de la frontière est encastée.	115

4.4	Visualisation de la déformée de la coque dans le cas où les trois-quarts de la frontière est encastrée.	115
4.5	Surface déformée. Encastrée aux trois-quarts et sur le quart restant de la frontière on a une relation de la forme $u_1 + u_2 = 1$	116
4.6	Surface déformée. À moitié encastrée et sur le quart supérieur et inférieur on a les relations $u_1 + u_2 = 1$, $u_1 + u_2 = 2$	116
4.7	Visualisation du domaine de référence ainsi que des frontières.	118
4.8	Visualisation des discontinuités.	120
4.9	Réflexion des caractéristiques sur une frontière où est prescrite une relation linéaire.	133
4.10	Domaine de référence utilisé	135
4.11	Coupes des solutions le long de [AB] et [CD]	136
4.12	Domaine de référence avec les discontinuités d'équations respectives : $x = x_0$ et $y = y_0$	140
4.13	Comparaison entre solutions analytique et approchée de u_1 sur [AB].	142
4.14	Comparaison entre solutions analytique et approchée u_2 l sur [CD]. Réflexion le long de $x = x_0$	143
4.15	Comparaison entre solutions analytique et approchée u_1 le long de [CD]. Réflexion le long de $y = -y_0$	143
4.16	Visualisation de la surface sous la contrainte $u_1 + u_2 = 0$ sur Σ_1 et Σ_2	144

Liste des tableaux

2.1	Comparaison des valeurs absolues au point A entre les éléments DKT et Argyris-Ganaev (AG) pour l'épaisseur $e=0.8$ et pour $f^e=p=0.01$. . .	47
2.2	Valeurs absolues au point A pour les éléments d'Argyris-Ganaev (AG) pour différentes valeurs de l'épaisseur e et pour $f^e=e.p=0.01e$	47
3.1	Éléments finis \mathcal{C}^0 triangulaires. Estimation d'erreur. Hypothèses sur les schémas d'intégration. Composantes tangentielles	85

Introduction

Une coque mince est un corps élastique de petite épaisseur dont la forme est proche d'une surface S . En théorie linéarisée, les déplacements et les déformations de la coque sont envisagés sous l'action de forces extérieures supposées suffisamment petites pour que la coque déformée reste proche de son état naturel. Dans ce qui suit, nous considérerons la coque soumise à des conditions aux limites, par exemple fixée par une partie (ou la totalité) de son bord à un support rigide.

Étant donnée une coque, définie en tant que matériau élastique, occupant dans son état naturel un domaine d'épaisseur ε autour d'une surface S , on se ramène à un problème bidimensionnel permettant la détermination du champ de déplacement u^ε de la surface S .

Lorsque l'épaisseur de la coque est faible, son comportement mécanique est bien décrit par celui de la surface moyenne S , ce qui, en théorie asymptotique revient à dire qu'il est voisin du comportement de la coque lorsque $\varepsilon \searrow 0$.

Il est maintenant bien connu (voir [35], [36], [37]) que le comportement d'une coque est très différent suivant que sa surface moyenne S (avec conditions aux limites) est ou non géométriquement rigide (coque inhibée ou non inhibée). Rappelons que la rigidité géométrique d'une surface, au sens qui convient en théorie des coques, consiste en la non existence de déplacements inextensionnels. Nous reviendrons au chapitre I sur cette classification (sect. 1.2.1). Retenons pour le moment que pour une surface non inhibée, la structure présente de grandes faiblesses tant est si bien que lors des simulations numériques ces faiblesses peuvent passer inaperçues. Dans le cas d'une surface inhibée le problème limite est bien posé, on parle alors de *coques membranaires*¹, mais on observe dans ce cas une perte de régularité des solutions liée à l'existence de couches limites. Cependant, pour certaines géométries des coques même inhibées, le problème limite peut conduire à la *sensitivité*² relativement aux données, ce qui rend impossible la simulation numérique de ce type de coques, ou encore observe-t-on des phénomènes de *réflexion*³. En conséquence, le calcul des coques très minces nécessite une bonne connaissance et compréhension du comportement des solutions lorsque $\varepsilon \searrow 0$.

¹voir [6] ou [7]

²[voir Lions et Sanchez-Palencia,26]

³voir [20]

Ce travail concerne certains problèmes liés au comportement des coques minces inhibées dont la surface moyenne S est hyperbolique.

Dans le cas inhibé, qui nous occupe ici, le problème limite lorsque $\epsilon \searrow 0$ apparaît comme un problème de perturbation singulière et conduit à la prise en compte de la forme bilinéaire d'énergie membranaire, donnant lieu à ce qu'on appelle "approximation membranaire".

Bien que l'étude des couches limites ne soit pas l'objet de ce mémoire, il convient d'avoir présent à l'esprit certaines idées fondamentales. Dans les problèmes inhibés, un point fondamental est que, contrairement à ce que l'on pourrait croire, la convergence $u_h^\epsilon \rightarrow u^\epsilon$ dans l'espace $V = H^1 \times H^1 \times H^2$ n'est pas uniforme par rapport à ϵ . Cela est une conséquence du fait que, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, la solution exacte u^ϵ converge (dans le meilleur des cas) vers un élément de l'espace V^o associé à la forme membranaire, alors $\|u^\epsilon\|_V$ n'est pas bornée dans cet espace (si c'était le cas, la limite serait dans cet espace). En conséquence, la norme dans un espace par exemple tel que $H^5 \times H^5 \times H^6$ ne reste pas bornée lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Or c'est l'appartenance à cet espace (très petit) qui est supposée pour prouver la convergence en $O(h^4)$ de l'approximation par éléments finis de Kanev-Argyris, c'est dire que le coefficient dans l'estimation correspondante explose (i.e. tend vers l'infini lorsque $\epsilon \rightarrow 0$). On pourrait néanmoins penser que la convergence est uniforme, même si les estimations deviennent illusoire pour $\epsilon \rightarrow 0$. On comprend qu'il n'en est rien du fait de l'existence des couches limites. Une fois de plus, puisque $u^\epsilon \rightarrow u^o$ dans V^o avec $u^o \notin V^o$, u^ϵ exhibe des couches limites où, dans une petite épaisseur $\delta(\epsilon)$, la fonction ou certaines de ses dérivées ont de fortes variations qui tendent vers l'infini. Pour bien approximer la solution, il est nécessaire de raffiner suffisamment le maillage dans les couches. En dehors des couches un maillage plus grossier est suffisant. En conséquence h dépend de ϵ .

Il est évident qu'une bonne approximation de la solution n'est possible que si l'on raffine suffisamment le maillage dans les couches. Ceci veut dire qu'en dehors des couches un maillage plus grossier suffit mais dans les couches un maillage plus fin est nécessaire d'où la dépendance de h avec ϵ .

De plus, la convergence $u^\epsilon \rightarrow u^o$ dans V^o n'a lieu que si le chargement appartient au dual de V_m . Or, V_m étant très grand, son dual est très petit si bien que très souvent on n'a même pas la convergence de u^ϵ . Des problèmes modèles simplifiés (note aux C.R.A.S. de Leguillon, Sanchez-Hubert et Sanchez Palencia à paraître) montrent le caractère encore plus pathologique de cette situation. : il se peut que le calcul correct de la couche soit nécessaire pour avoir un calcul correct de la solution à l'extérieur de cette couche (autrement dit, les erreurs se propagent de la couche vers l'extérieur)

Il existe de nombreux codes de calcul pour la simulation numérique des coques. Ces codes sont construits à l'aide d'éléments finis, souvent sophistiqués. Ceci s'explique, en partie, par la difficulté rencontrée dans le calcul de la composante normale et des déformations. La grande faiblesse de ces codes réside dans le fait qu'ils se veulent

polyvalents. En effet, dans la conception de ces codes numériques l'idée directrice est de traiter une grande classe de coques. Ces codes ne tiennent aucun compte du caractère inhibé ou non inhibé de la coque sur laquelle on veut faire la simulation. De nombreux schémas sont donc proposés ainsi que de nouveaux éléments finis afin de palier ces difficultés. Le domaine de validité de ces divers schémas est loin d'être connu, faute d'une connaissance explicite de la causalité des phénomènes en jeu. Bien entendu, les différents schémas n'ont pas tous le même comportement face à la non uniformité. Il est avéré que le schéma Argyris-Ganev est très bon : ce n'est que pour des ε très petits que les difficultés se présentent. À notre connaissance, il n'existe pas de codes numériques séparant de manière nette les coques inhibées des coques non inhibées. C'est pourquoi nous avons orienté nos travaux vers la recherche d'un code adapté, nous restreignant, dans ce mémoire, au cas des coques hyperboliques inhibées.

Après avoir rappelé les propriétés du processus ($\varepsilon \searrow 0$), pour les coques hyperboliques très minces et avoir explicité le problème limite ($\varepsilon = 0$) sachant que, même dans le cas où les forces données sont régulières par morceaux, le champ de déplacements ne peut être décrit par des fonctions régulières nous mettons au point un code de calcul adapté du dit problème limite. Nous avons ensuite comparé nos résultats numériques avec ceux obtenus avec le code Modulef. Le résultat est intéressant car il renforce l'idée selon laquelle, même dans le cas des coques hyperboliques inhibées, un seul code ne peut être polyvalent.

La conséquence de ce qui précède est qu'il n'y a pas uniformité de la convergence par rapport à ε . La connaissance des couches apparaît donc fondamentale pour faire un maillage efficace.

La seconde partie de ce mémoire est consacrée à l'étude des réflexions des singularités aux frontières. Nous nous limitons encore ici au cas des coques hyperboliques inhibées. Le problème est ainsi posé : soit $[[u]]$ une discontinuité de la solution u d'un système hyperbolique admettant deux familles de courbes caractéristiques. Soit C une courbe non caractéristique. Au sens classique, on dit qu'il y a réflexion de $[[u]]$ sur une courbe C si la discontinuité, propagée le long d'une caractéristique, se trouve, après avoir rencontré la courbe C , propagée dans la direction de l'autre caractéristique (cf. équations des ondes). Or, il se trouve que dans certaines simulations numériques, on peut observer des phénomènes faisant penser à de telles réflexions de singularités aux frontières.

Cependant, l'étude de quelques exemples modèles montre immédiatement qu'avec les conditions cinématiques dans les problèmes de mécanique il ne peut y avoir réflexion aux frontières au sens indiqué. Quelle est donc l'origine des "réflexions" observées? Nous avons mis en évidence un phénomène que nous qualifions de pseudo réflexion lié au couplage des équations et que nous présentons dans cette seconde partie.

Ce mémoire comporte quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à un rappel de la théorie des surfaces et la présen-

tation des problèmes limites des coques hyperboliques inhibées.

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions de la première forme fondamentale, liée à la métrique, et de la seconde forme fondamentale liée à la courbure et permettant de définir le caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique de chaque point de la surface. En effet, en chaque point, la seconde forme fondamentale détermine localement la position de la surface par rapport au plan tangent en ce point. Les directions asymptotiques sont celles qui limitent au voisinage de chaque point les régions de la surface qui sont de part et d'autre du plan tangent. Les lignes asymptotiques sont les courbes tangentes en chacun de leur point à une direction asymptotique. Dans ce mémoire, les lignes asymptotiques seront prises comme lignes coordonnées. Les lignes asymptotiques jouent un rôle important pour la détermination des zones inhibées et non inhibées, en effet, l'inhibition relève d'un système hyperbolique dont les caractéristiques sont les courbes asymptotiques. L'inhibition revient à un théorème d'unicité pour un système hyperbolique. Les propriétés de non régularité des solutions sont rappelées.

Le deuxième chapitre est consacré à l'utilisation du code de calcul *Modulef* afin de tester la robustesse des éléments finis d'Argyris et Ganev lorsque l'épaisseur tend vers zéro. Par ailleurs, nous exploitons ces mêmes tests numériques pour dégager de manière empirique une relation entre l'épaisseur et le pas de maillage. Nous mettons en évidence l'existence d'un pas de maillage optimal pour chaque épaisseur fixée. Le pas de maillage optimal est fonction de la dimension de la coque et de sa courbure. La difficulté majeure pour mettre en évidence le pas de maillage optimal réside dans le fait qu'il faut avoir à sa disposition de puissants et rapides ordinateurs afin de pouvoir stocker les matrices de rigidité et les seconds membres "gigantesques". En effet, plus on raffine le domaine d'étude, plus on augmente le nombre de degrés de liberté et plus on allonge le temps de calcul. Nous montrons, à l'aide d'exemples dont la solution peut être calculée à la main, que lorsque les solutions sont très régulières le code *Modulef* donne de très bons résultats à condition d'être dans les espaces $H^5(\Omega) \times H^5(\Omega) \times H^6(\Omega)$. En revanche, si les données présentent des discontinuités il y a une dégradation des résultats numériques avec présence d'oscillations.

Le troisième chapitre est dédié à l'analyse numérique du problème limite dans l'approche par éléments finis de type Lagrange. Nous montrons qu'il est possible d'établir des critères de convergence pour le problème limite réduit. Nous effectuons des tests numériques sur des exemples modèles. Nous établissons clairement, que les éléments finis de Lagrange de type P_1 et P_2 sont très efficaces aussi bien pour des solutions régulières que pour des solutions présentant des discontinuités. Nous montrons que la principale faiblesse des éléments P_1 réside dans le fait que pour avoir des résultats satisfaisants il faut raffiner suffisamment le domaine d'étude. Ce n'est pas le cas pour les éléments P_2 . En revanche, le temps de calcul se trouve allongé mais il reste tout à fait raisonnable.

Le quatrième chapitre concerne le problème des réflexions des singularités aux frontières. Nous montrons d'abord sur des exemples modèles que les conditions aux limites

relatives aux coques étant imposées aux frontières il ne peut y avoir réflexion de singularités aux sens classique. Cependant, il est possible que le couplage des équations et des inconnues conduisent à des phénomènes qui y ressemblent, et que nous désignons sous le nom de pseudo réflexions. Nous faisons enfin un bref rappel de la théorie des systèmes hyperboliques montrant que le phénomène de réflexion proprement dit ne peut avoir lieu que si des conditions aux limites bien particulières, qui ne sont pas celles des problèmes de coques sont satisfaites.

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un programme de recherches en cours mené parallèlement au sein du laboratoire de mécanique de l'université de Caen et du laboratoire de Modélisation en Mécanique de l'Université Pierre et Marie Curie. Il constitue une étape dans une recherche en constante évolution.

Notations et conventions principales

Conventions

Dans toute la suite de la thèse, nous utiliserons les conventions suivantes :

- nous désignerons par des lettres grecques (α, β, \dots) les indices ne prenant que les valeurs 1 et 2
- les vecteurs ou champs de vecteurs sont désignés en caractère gras ou surmontés d'une flèche, par exemple \mathbf{v} ou encore \vec{v}
- pour les dérivées, on utilise, suivant les cas, trois types de notations

$$\frac{\partial u}{\partial y^\alpha} = u, \alpha = \partial_\alpha u$$

- les composantes contravariantes d'un vecteur (ou d'un tenseur) sont notées avec des indices supérieurs et les composantes covariates avec des indices inférieurs. La convention de sommation sur les indices répétés est utilisée, dans ce cas, en sommant un indice covariant avec un indice contravariant.

$$a_i \cdot b^i = \sum_{i=1}^{i=3} a_i \cdot b^i$$

- lorsqu'il n'y a pas lieu de distinguer entre composantes covariantes et contravariantes, la convention de sommation est appliquée à n'importe quel indice répété.
- \mathbb{R} désigne le corps des nombres réels, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ etc...

Notations

\mathcal{E} désigne l'espace Euclidien rapporté à une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

- Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^3
- S désigne une surface de \mathcal{E}
- $\partial\Omega$ désigne la frontière du domaine Ω
- Σ_i désigne une portion de frontière du domaine Ω
- Ψ (respectivement $\vec{\Phi}$ suivant le cas) sera réservée dans toute la thèse pour désigner une fonctions définie sur Ω à valeur dans \mathbb{R}^3 , Ψ (respectivement $\vec{\Phi}$) représente un paramétrage d'une surface S
- le doublet (Ω, Ψ) désigne une carte locale d'une surface S
- le triplet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ désigne la base covariante d'une surface S avec la carte locale (Ω, Ψ)

Espaces fonctionnels

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2

- soit V un espace de Hilbert alors V' désigne l'espace dual de V
- $\langle, \rangle_{V', V}$ désigne le produit scalaire dans la dualité V', V
- $[[u]]$ désigne le saut de u au passage de la discontinuité
- $\mathcal{C}(\Omega)$: espace des fonctions continues définies sur Ω
- $\mathcal{C}_o(\Omega)$: espace des fonctions continues à support compact dans Ω
- $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k > 0$: espace des fonctions continues définies sur Ω , dont les dérivées partielles d'ordres $\leq k$ sont continues
- $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω
- $D(\Omega)$: espace des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact
- $D'(\Omega)$: espace des distributions sur Ω , dual de $D(\Omega)$
- $L^2(\Omega)$: espace des fonctions de carré mesurables sur Ω
- $L^\infty(\Omega)$: espace des fonctions mesurables sur Ω et bornées presque partout
- $W^{m,p}(\Omega)$, $H^m(\Omega)$ espace de sobolev sur Ω
- δ désigne la distribution de Dirac à l'origine, $\delta(x - a)$ la distribution de Dirac au point a dans \mathbb{R} et le long de la droite d'équation $x=a$ dans \mathbb{R}^2

Chapitre 1

Déformation des surfaces. Coques minces hyperboliques inhibées

1.1 Surface paramétrée. Première et seconde formes fondamentales

Désignons par \mathcal{E} l'espace euclidien. Une surface S de \mathcal{E} est définie par une carte locale (Ω, Ψ) où Ω est un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 , Ψ une application de classe au moins \mathcal{C}^2 définie sur Ω à valeurs dans \mathcal{E} .

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \Psi : \Omega &\longrightarrow S \subset \mathcal{E} \\ (y^1, y^2) &\longmapsto \Psi(y^1, y^2) \end{aligned}$$

Les vecteurs $\Psi_{,\alpha} = \partial_\alpha \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y^\alpha}$ tangents à S seront notés \mathbf{a}_α pour $\alpha \in [1, 2]$, le vecteur normal unitaire au point (y^1, y^2) sera noté \mathbf{N}

$$(1.2) \quad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|}$$

L'application Ψ étant de classe \mathcal{C}^2 , les vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{N}$ sont définis de manière unique. On suppose que $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ne sont pas colinéaires (cf. figure 1.1 page 2).

Définition 1.1.1 *Le triplet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{N})$ forme la base covariante en chaque point de S , on lui associe la base contravariante (où encore base duale) $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{N})$, définie par $\langle \mathbf{a}^\alpha, \mathbf{a}_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha$. Le vecteur \mathbf{N} est unitaire et $\langle \mathbf{N}, \mathbf{a}^1 \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{a}^2 \rangle = 0$.*

Ainsi tout vecteur \mathbf{f} de \mathbb{R}^3 s'exprime de manière unique dans ces deux bases, les

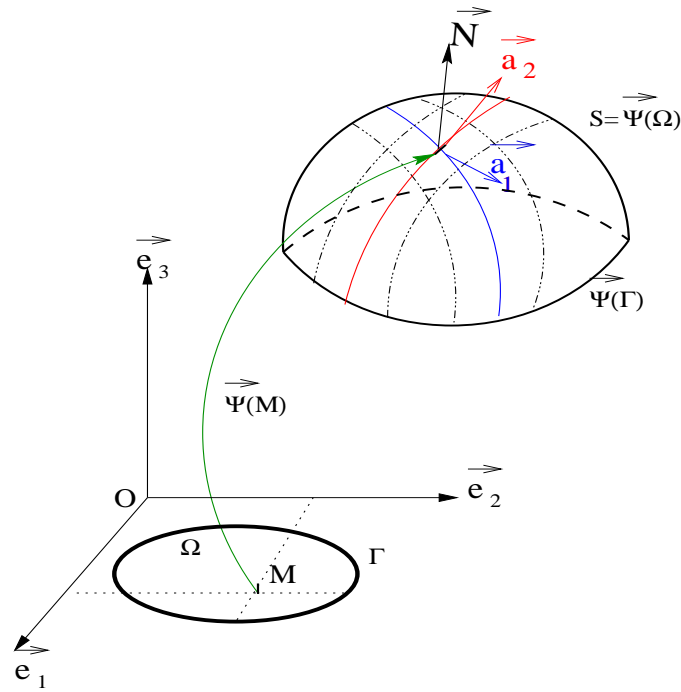


FIG. 1.1 – Définition de la surface moyenne

composantes covariantes étant exprimées dans la base contravariante et les composantes contravariantes dans la base covariante.

1.1.1 Première et seconde formes fondamentales

Les deux formes fondamentales rattachées à une surface S sont deux formes quadratiques définies comme suit :

Définition 1.1.2 *La première forme fondamentale en un point M d'une surface S est la forme quadratique $(a_{\alpha\beta})$ dans sa représentation matricielle liée au repère covariant sur le fibré tangent $T_M S$ dont les coefficients sont définis par :*

$$(1.3) \quad a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$$

En chaque point de la surface, la première forme fondamentale est le carré de la forme différentielle $d\Psi$. Elle induit une métrique sur S notée parfois ds^2 (voir [40]).

Définition 1.1.3 *la seconde forme fondamentale en un point M d'une surface S est la forme quadratique $(b_{\alpha\beta})$ dans sa représentation matricielle liée au repère covariant sur le fibré tangent $T_M S$ dont les coefficients sont définis par :*

$$(1.4) \quad b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{N}_{,\beta} \cdot \mathbf{a}_\alpha$$

Remarque 1.1.1 *Les deux formes fondamentales sont symétriques. Elles restent invariantes par changements de coordonnées conservant l'orientation.*

Dans la base contravariante les représentations matricielles des première et seconde formes fondamentales des coques sont :

$$(1.5) \quad a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta$$

c'est-à-dire l'inverse de la matrice $(a_{\alpha\beta})$.

$$(1.6) \quad b^{\alpha\beta} = \mathbf{N}_{,\beta} \cdot \mathbf{a}^\alpha$$

1.1.2 Dérivée covariante d'un vecteur

Soit \mathbf{v} un champ de vecteurs exprimé dans le repère locale, lorsqu'on passe d'un point M à un point voisin $M+dM$ de la surface non seulement les composantes du vecteur varient mais le repère local est lui aussi modifié. En conséquence, les bases covariantes et contravariantes ne sont ni orthonormées ni orthogonales et les dérivées partielles n'obéissent pas aux règles de dérivation usuelle. Les formules de Gauss et de Weingarten donnent les règles de dérivations dans ces bases.

$$(1.7) \quad \begin{cases} \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \mathbf{a}_\lambda + b_{\alpha\beta} \mathbf{N}, \\ \mathbf{a}^\alpha_{,\beta} = -\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha \mathbf{a}^\lambda + b_\beta^\alpha \mathbf{N}, \\ \mathbf{N}_{,\alpha} = -b_\alpha^\lambda \mathbf{a}_\lambda. \end{cases}$$

où les coefficients $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ sont les symboles de Christoffel définis par :

$$(1.8) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \mathbf{a}^\lambda \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta}$$

Ayant ainsi introduit les notions de dérivation covariante pour tout champ de vecteurs \mathbf{u} défini sur une surface S , plus précisément sur le domaine de référence Ω , on peut exprimer les dérivées partielles des composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur. Posant $\mathbf{u} = u_\delta \mathbf{a}^\delta + u_3 \mathbf{N}$ le calcul de $\partial_\alpha \mathbf{u}$ donne :

$$(1.9) \quad \partial_\alpha \mathbf{u} = (u_{\lambda,\alpha} - \Gamma_{\lambda\alpha}^\delta u_\delta - b_{\lambda\alpha} u_3) \mathbf{a}^\lambda + (u_{3,\alpha} + b_{\alpha\delta} u^\delta) \mathbf{N}$$

1.1.3 Courbes paramétrées sur une surface

Considérons une surface S définie par une carte (Ω, Ψ) . Soit (\mathcal{C}) (cf. figure 1.2 page 4) une courbe sur S paramétrée par une application suffisamment régulière $\mathbf{g} : I = [a, b] \rightarrow S$ telle que $\mathbf{g} = (y^1(s), y^2(s))$. On prend comme paramètre l'abscisse curviligne s ; alors en tout point de (\mathcal{C}) , on définit les vecteurs normaux unitaires principaux et le vecteur binormal notés $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ définis par :

$$(1.10) \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{g}}{ds}, \quad \mathbf{n} = \frac{\frac{d^2\mathbf{g}}{ds^2}}{\left\| \frac{d^2\mathbf{g}}{ds^2} \right\|}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}$$

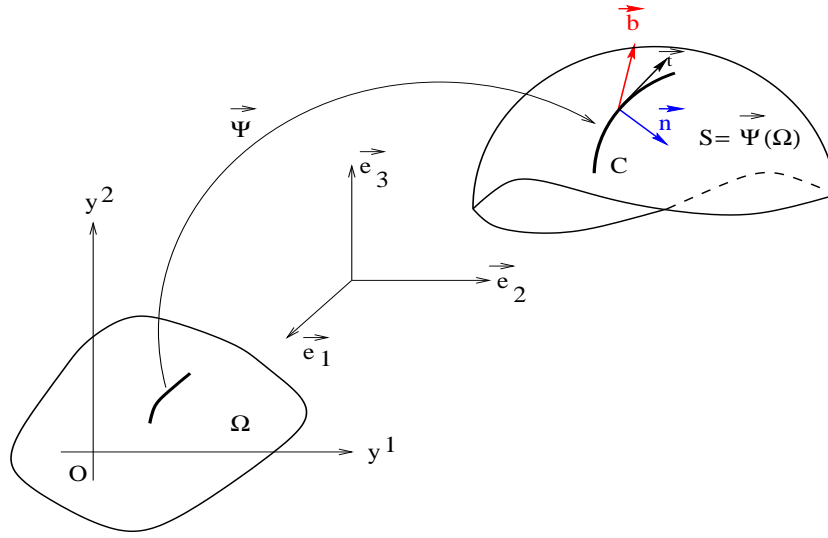


FIG. 1.2 – Courbe C sur une surface S

L'étude des courbes sur les surfaces S donne une interprétation géométrique des première et seconde formes fondamentales. La première forme fondamentale est attachée aux caractéristiques métriques de la surface. Les coefficients de sa représentation matricielle apparaissent dans l'expression donnant la longueur d'arc de courbes. La seconde forme fondamentale mesure la courbure de la surface dans une direction. Les coefficients $b_{\alpha\beta}$ interviennent dans l'expression donnant la distance d'un point de la surface au plan tangent à la surface.

Proposition 1.1.1 *Étant donnée un arc $\mathcal{C} = ([s_0, s_1], \mathbf{g})$ sur la surface S , la longueur de cet arc est donnée par :*

$$L = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{a_{\alpha\beta} \frac{dy^\alpha(s)}{ds} \frac{dy^\beta(s)}{ds}} ds$$

1.1.4 Classification des surfaces

Soit S une surface définie par une carte (Ω, Ψ) . On considère une courbe (\mathcal{C}) de S d'abscisse curviligne s et définie par l'application suivante :

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \mathbf{g} : [a, b] \subset \mathbb{R} &\longrightarrow S \subset \mathcal{E} \\ s &\longmapsto \mathbf{g}(s) = (y^1(s), y^2(s)) \end{aligned}$$

En tout point M de la courbe (\mathcal{C}) , on définit le trièdre de Frenet au point M par $(M, \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$, c'est-à-dire la tangente, la normale et binormale unitaires à la courbe au point M . Nous avons alors les relations suivantes :

$$(1.12) \quad \frac{\mathbf{n}}{R} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \quad \frac{\mathbf{b}}{T} = \frac{\mathbf{t}}{R} + \frac{d\mathbf{n}}{ds}$$

où R désigne le rayon de courbure et $\frac{1}{R}$ la courbure, T le rayon de torsion, $\frac{1}{T}$ la torsion. On définit alors la courbure normale $\frac{1}{R_N}$ par :

$$(1.13) \quad \frac{\cos \varphi}{R} = \frac{1}{R_N} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}}{R} = \frac{b_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta}{a_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta}$$

Ceci établit le lien entre les première et seconde formes fondamentales $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$ de la surface moyenne et le rayon de courbure R_N de la courbe considérée. Lorsque le vecteur tangent \mathbf{t} unitaire balaie le plan tangent, la courbure normale $\frac{1}{R_N}$ prend une valeur minimale $\frac{1}{R_{N1}}$ et une valeur maximale $\frac{1}{R_{N2}}$ qui sont associées aux directions principales de courbure. Les directions \mathbf{t} correspondantes sont appelées directions principales. Enfin, notons que la courbure moyenne \mathbf{H} et la courbure totale \mathbf{K} de la surface sont données par :

$$(1.14) \quad \begin{cases} \mathbf{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{N1}} + \frac{1}{R_{N2}} \right), \\ \mathbf{K} = \frac{1}{R_{N1} R_{N2}}. \end{cases}$$

Définition 1.1.4 On appelle ligne principale de courbure les courbes dont tous les vecteurs tangents sont proportionnels à une direction principale.

Définition 1.1.5 Les directions \mathbf{t} suivant lesquelles l'application précédente (1.13 page 5) s'annule (sur lesquelles les courbures changent éventuellement de signe) sont appelées directions asymptotiques. Une ligne asymptotique d'une surface S est une courbe dont chaque vecteur tangent est parallèle à une direction asymptotique.

La seconde forme fondamentale est une forme quadratique, par conséquent une direction asymptotique (i.e. combinaison linéaire des vecteurs tangents à la surface) $\mathbf{t} = \alpha \mathbf{a}_1 + \beta \mathbf{a}_2$ est une racine du polynôme du second degré :

$$(1.15) \quad Q(\mathbf{t}) = \alpha^2 b_{11} + 2\alpha\beta b_{12} + \beta^2 b_{22}$$

L'existence des directions asymptotiques est subordonnée au signe du discriminant $\Delta = b_{12}^2 - b_{11}b_{22}$. L'étude de ce signe précise la position relative des points de la surface par rapport au plan tangent. Cette étude détermine le caractère elliptique, parabolique ou hyperbolique d'un point de la surface.

- si $\Delta < 0$: la deuxième forme fondamentale garde un signe constant, la surface est localement située d'un même côté de son plan tangent. On dit que la surface est elliptique en ce point (cf. figure 1.3 page 7).
- si $\Delta = 0$: la seconde forme fondamentale s'annule au moins pour une des directions tangentes alors la surface est parabolique en ce point (cf. figure 1.4 page 8).
- si $\Delta > 0$: il existe deux directions tangentes de signes opposés. Le plan tangent traverse la surface suivant les deux directions. On dit que la surface est hyperbolique en ce point (cf. figure 1.4 page 8).

De façon analogue nous avons les classifications usuelles d'une portion de surface :

Définition 1.1.6 *Soit $S=(\Omega, \Psi)$ une surface paramétrée. On dira que S est uniformément hyperbolique, parabolique, ou elliptique, suivant que le déterminant de la seconde forme fondamentale est positif, nul ou négatif sur $\bar{\Omega}$.*

Sur une surface elliptique, les directions asymptotiques sont complexes non réelles. Il n'y a pas de lignes asymptotiques a fortiori.

Sur une surface hyperbolique, on détermine à partir de (1.15 page 6), deux familles de lignes asymptotiques; nous verrons qu'il est possible d'avoir une carte (Ω, Ψ) telle que les courbes coordonnées ($y^\alpha = \text{cste}$, $\alpha = 1$ ou 2) soient les lignes asymptotiques.

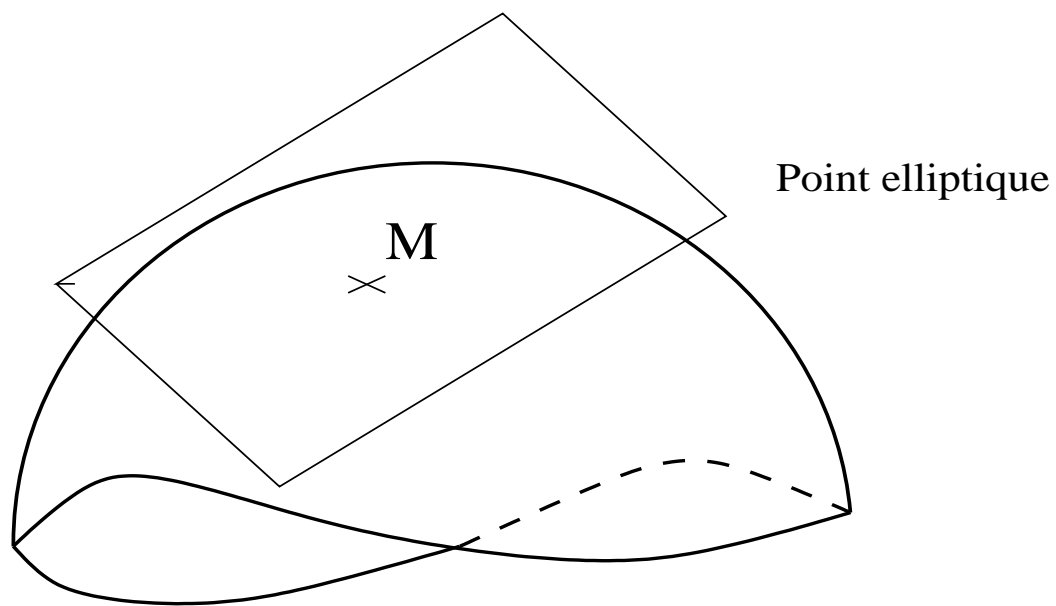
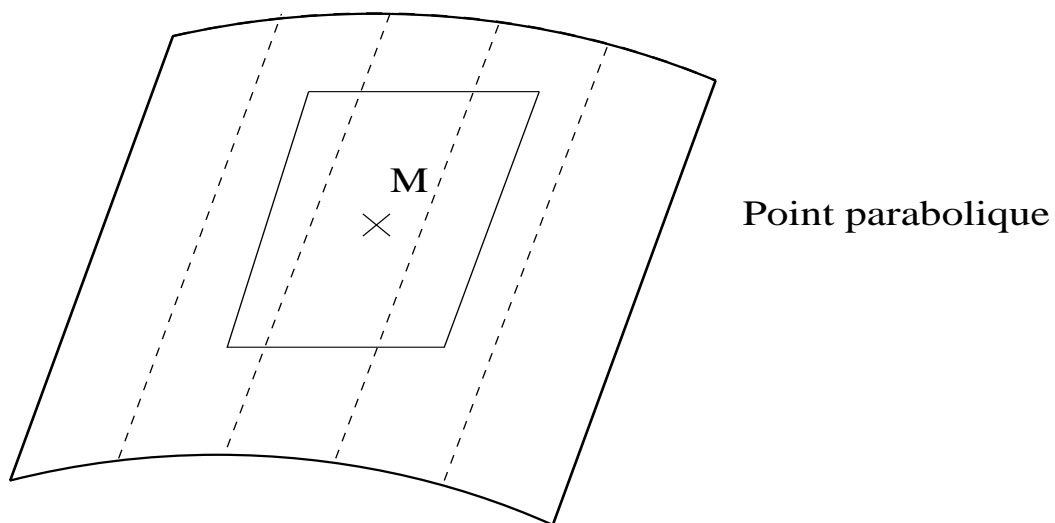


FIG. 1.3 – Définition de la surface moyenne



Point hyperbolique

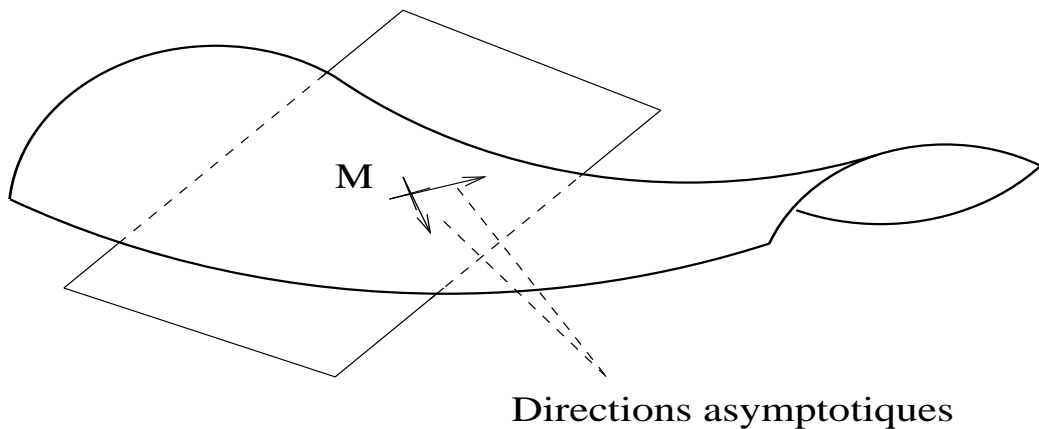


FIG. 1.4 – Définition de la surface moyenne

1.1.5 Paramétrisations spéciales des surfaces

Une propriété importante des surfaces est la possibilité de choisir, selon les besoins et la nature de la surface, une carte telle que les coefficients des première ou seconde formes fondamentales ou encore des symboles de Christoffel se simplifient de façon adaptée. Cette propriété résulte de la réduction des formes quadratiques.

Théorème 1.1.2 *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^2 paramétré par x^1, x^2 et une forme quadratique Q définie sur Ω :*

$$Q(x^1, x^2) = b_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta, (\alpha, \beta) \in [1, 2]$$

avec les coefficients $b_{\alpha\beta}$ fonctions continues sur Ω .

Si Q est définie positive (resp. $-Q$) uniformément sur Ω , alors il existe un changement de variable $y^1(x^1, x^2)$ et $y^2(x^1, x^2)$ ainsi qu'une fonction $q(y^1, y^2)$ continue sur Ω tels que Q s'écrit :

$$(1.16) \quad Q(y^1, y^2) = q(y^1, y^2)(y^1 y^1 + y^2 y^2) \text{ (resp. } Q(y^1, y^2) = q(y^1, y^2)y^1 y^2 \text{)}.$$

Pour une démonstration de ce théorème nous renvoyons le lecteur à [9]. De ce théorème découle un corollaire important qui nous sera utile dans la suite puisque nous étudions les surfaces uniformément hyperboliques.

Corollaire 1.1.3 *Soit S une surface uniformément hyperbolique, il existe une carte de S (Ω, Ψ) telle que les coefficients de la seconde forme fondamentale se réduisent à :*

$$b_{11} = b_{22} = 0 \text{ et } b_{12} \neq 0$$

1.2 Théorie classique des coques minces et leur comportement asymptotique

Dans cette section nous rappelons des éléments de la théorie linéaire des coques minces et leur comportement asymptotique lorsque l'épaisseur relative rapportée aux autres dimensions tend vers zéro. Pour une étude plus détaillée nous renvoyons le lecteur à [35]. Nous nous plaçons, comme dans [35], dans le cadre du modèle bidimensionnel des coques élastiques de W. T. Koiter [22].

Considérons une coque élastique, définie à partir d'une surface S par une carte locale (Ω, Ψ) où Ψ est au moins de classe $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ et Ω un domaine connexe de \mathbb{R}^2 .

Le problème mécanique consiste à trouver le champ de déplacement \mathbf{u}^ϵ de la surface soumise à un champ de forces extérieures \mathbf{f} et à certaines conditions aux limites. Afin de rester dans le cadre linéarisé par rapport au déplacement nous supposons que les forces extérieures sont suffisamment petites. Les hypothèses formulées par W.T. Koiter (voir [22]), maintenant rigoureusement démontrées (cf. [35]), sont les suivantes :

- les normales à la surface moyenne non déformée sont encore normales à celle-ci après déformation
- les contraintes sont approximativement planes et parallèles au plan tangent pendant la déformation.

Ainsi le problème mécanique tridimensionnel se réduit à un problème bidimensionnel sur la surface moyenne. Soit ϵ l'épaisseur de la coque supposée petite mais fixé. La théorie classique linéarisée consiste à admettre que les contraintes membranaires et les moments sont des fonctions linéaires des tenseurs de déformation et de changement de courbure de la surface S notés respectivement $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\rho_{\alpha\beta}$. Dans ces conditions, les contraintes membranaires et les moments sont, en composantes contravariantes :

$$(1.17) \quad \begin{cases} T^{\alpha\beta} = \epsilon A^{\alpha\beta\lambda\nu} \gamma_{\lambda\nu}, \\ M^{\alpha\beta} = \frac{1}{12} \epsilon^3 A^{\alpha\beta\lambda\nu} \rho_{\lambda\nu}. \end{cases}$$

La forme d'énergie s'écrit donc :

$$(1.18) \quad \epsilon \int_{\Omega} T^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} dS + \frac{1}{12} \epsilon^3 \int_{\Omega} M^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} dS = \epsilon^3 \int_{\Omega} (f^\alpha v_\alpha + f^3 v_3) dS.$$

Ceci nous conduit alors à poser le problème suivant :

$$(1.19) \quad \mathcal{P} = \begin{cases} \text{étant donnée } \mathbf{f} \text{ trouver } \mathbf{u}^\epsilon \in V \text{ tel que,} \\ \epsilon^{-2} a_o(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V', V} \forall \mathbf{v} \in V. \end{cases}$$

où a_o et a_1 sont respectivement les formes bilinéaires d'énergie de déformations membranaires et de flexion indépendantes de ϵ . L'espace V sera défini ultérieurement.

Les expressions des formes bilinéaires d'énergie de déformation membranaire et de flexion sont :

$$(1.20) \quad a_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} A_{11}^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\mathbf{u}) \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) dS$$

$$(1.21) \quad a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} A_{22}^{\alpha\beta\lambda\mu} \rho_{\lambda\mu}(\mathbf{u}) \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) dS$$

où les $A^{\alpha\beta\lambda\nu}$, $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\rho_{\alpha\beta}$ sont respectivement les coefficients d'élasticité de la coque, les composantes du tenseur de déformation et le tenseur de changement de courbure de S.

Dans le cas où le matériau est isotrope et homogène, les coefficients d'élasticité ont pour expression :

$$(1.22) \quad A^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)}(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{(1-\nu)}a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu})$$

où E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau et les $a^{\alpha\beta}$ sont les composantes contravariantes de la première forme fondamentale.

Les expressions du tenseur de déformation et de courbure de la surface S sont les suivantes :

$$(1.23) \quad \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u_\lambda - b_{\alpha\beta} u_3$$

où les coefficients $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ et $b_{\alpha\beta}$ sont respectivement les symboles de Christoffel et les coefficients de la seconde forme fondamentale, enfin le tenseur de variation de courbure a pour expression :

$$(1.24) \quad \begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}) = & \partial_{\alpha\beta}^2 u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda u_3 - b_\alpha^\gamma b_{\gamma\beta} u_3 + \partial_\alpha (b_\beta^\delta u_\delta) \\ & - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma b_\gamma^\delta u_\delta + b_\alpha^\gamma (\partial_\beta u_\gamma - \Gamma_{\beta\gamma}^\delta u_\delta) \end{aligned}$$

L'espace fonctionnel approprié pour l'étude du problème mécanique est :

$$(1.25) \quad V = \{\mathbf{v}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \cap \text{conditions aux limites}\}$$

Dans le cas des coques encastées l'espace fonctionnel est défini par :

$$(1.26) \quad V = \{\mathbf{v}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \mid \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0, \partial_n v_3|_{\partial\Omega} = 0\}$$

muni de la norme :

$$(1.27) \quad \|v\|_V^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \|v_\alpha\|_{H_0^1}^2 + \|v_3\|_{H_0^2}^2$$

pour lequel M. Bernadou et P.G. Ciarlet (cf. [2]) ont démontré l'ellipticité du modèle des coques de Koiter pour tout ϵ fixé non nul.

1.2.1 Comportement asymptotique lorsque $\epsilon \searrow 0$

Lorsque l'épaisseur de la coque tend vers zéro, le comportement des solutions prend deux formes très différentes suivant que la surface moyenne (à laquelle sont imposées des conditions aux limites) est géométriquement rigide (la coque est alors dite inhibée) ou non (coque non inhibée).

Du fait de l'existence de ces deux types de comportement, suivant que la surface moyenne est ou non géométriquement rigide, il apparaît clairement que l'influence de la géométrie est déterminante pour les valeurs de ϵ petites.

Le point essentiel est que, lorsque cela est possible, la coque a tendance à se déformer en effectuant des déplacements inextensionnels c'est-à-dire que la solution aura tendance à annuler la forme membranaire de telle sorte que le problème limite est analogue à (1.19) mais dans le sous-espace, noté G des flexions pures, il s'écrit :

$$(1.28) \quad a_1(\mathbf{u}^\epsilon, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{V',V} \quad \forall \mathbf{v} \in G$$

où G l'espace des déplacements inextensionnels est défini par :

$$(1.29) \quad G = \{ \mathbf{v} \in V \mid \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = 0 \}$$

Si $G \neq \{0\}$ (problèmes non inhibés), on montre [15] que le comportement limite entre dans le cadre des problèmes de pénalisation. Si $G = \{0\}$ (problème inhibé), on a affaire à un problème de perturbation singulière. Ce mémoire n'est concerné que par ce dernier cas.

1.3 Coques inhibées, Cas des surfaces uniformément hyperboliques

Nous considérons à présent le cas des coques inhibées, dont la surface moyenne est uniformément hyperbolique. Cette section reprend le chapitre VII de [35]. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, afin que le problème rentre dans le champ d'application du théorème de Lax-Milgram, nous devons faire une hypothèse sur le champ de forces \mathbf{f} . Elle est certes contraignante à première vue, mais représente des situations réels.

Problématique

L'espace G des déplacements inextensionnels est défini par :

$$(1.30) \quad G = \{\mathbf{v} \in V \mid a_o(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \forall \mathbf{w} \in V\} = \{\mathbf{v} \in V \mid \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = 0\}$$

Dans le cas inhibé l'espace G se réduit à l'élément nul. Dans ce cas $u^\epsilon \rightarrow 0$ dans V fort. Nous allons préciser ce comportement limite. Posons

$$\mathbf{u}^\epsilon = \epsilon^2 \mathbf{v}^\epsilon$$

en reportant dans (1.19 page 10), nous obtenons

$$(1.31) \quad a_o(\mathbf{v}^\epsilon, \mathbf{w}) + \epsilon^2 a_1(\mathbf{v}^\epsilon, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle \quad \forall \mathbf{w} \in V$$

alors lorsque $\epsilon \searrow 0$, le problème limite s'écrit

$$a_o(\mathbf{v}^o, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle, \quad \forall \mathbf{w} \in V$$

la première forme bilinéaire a_o définit une norme sur l'espace V car $a_o(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ entraîne $\mathbf{v} = 0$. On remarque sans difficulté que la première forme bilinéaire a_o n'est pas coercive sur V . Désignons V^o l'espace complété de V pour la norme déduite de a_o alors, pour une donnée \mathbf{f} satisfaisant à

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle \leq C \sqrt{a_o(\mathbf{w}, \mathbf{w})}, \quad \forall \mathbf{w} \in V$$

le problème devient :

$$(1.32) \quad \mathcal{P}^l = \begin{cases} \text{étant donnée } \mathbf{f}, \text{ trouver } \mathbf{v}^o \in V^o \text{ tel que,} \\ a_o(\mathbf{v}^o, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle_{V^l, V} \quad \forall \mathbf{w} \in V^o. \end{cases}$$

avec

$$(1.33) \quad a_o(\mathbf{v}^o, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} A^{\alpha\beta\lambda\nu} \gamma_{\lambda\nu}(\mathbf{v}^o) \gamma_{\lambda\nu}(\mathbf{w}) dS$$

où l'on a posé

$$(1.34) \quad \begin{cases} dS = \sqrt{a} dx^1 dx^2 \text{ avec } a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ \text{le matériau étant homogène et isotrope alors :} \\ A^{\alpha\beta\lambda\nu} = \frac{E}{2(1+\nu)} [a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\beta\lambda} a^{\alpha\mu} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu}]. \end{cases}$$

Théorème 1.3.1 *Étant donnée \mathbf{f} , telle que la forme linéaire soit continue sur V^o , soit v^ϵ la solution de (1.31 page 13) alors quand ϵ tend vers zéro on a :*

$$(1.35) \quad \mathbf{v}^\epsilon \longrightarrow \mathbf{v}^o \text{ dans } V^o \text{ fort}$$

et \mathbf{v}^o est solution de (1.32)

puisque nous avons

$$(1.36) \quad T^{\alpha\beta}(\mathbf{v}^o) = A^{\alpha\beta\lambda\nu} \gamma_{\lambda\nu}(\mathbf{v}^o)$$

nous pouvons encore écrire la forme bilinéaire sous la forme

$$(1.37) \quad a_o(\mathbf{v}^o, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} T^{\alpha\beta}(\mathbf{v}^o) \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{w}) dS$$

On admettra le lemme suivant qui sera utile pour pouvoir faire les intégrations par parties usuelles.

Lemme 1.3.2 *Soit \mathcal{S} une surface régulière de \mathbb{R}^3 , de frontière $\partial \mathcal{S}$, définie par une carte (Ω, Ψ) . Soit \mathbf{v} un champ de vecteurs tangents à la surface en chacun de ses points, de composantes contravariantes v^1, v^2 . Alors, le théorème de la divergence prend la forme :*

$$\int_{\mathcal{S}} D_\alpha v^\alpha dS = \int_{\partial \mathcal{S}} v^\alpha n_\alpha ds$$

où dS désigne l'élément d'aire de la surface, ds l'élément linéaire le long de $\partial \mathcal{S}$, \mathbf{n} le vecteur unitaire, tangent à la surface et normal à $\partial \mathcal{S}$, dirigé vers l'extérieur et D_α la dérivée covariante.

Si bien qu'en tenant compte de la relation et de la propriété suivantes :

i) $\gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(D_\alpha w_\beta + D_\beta w_\alpha) - b_{\alpha\beta} w_3$

ii) la forme bilinéaire a_o est symétrique

et du lemme 1.3.2 (cf. page 14), nous obtenons au sens des distributions, en choisissant comme fonction test $\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega)$, les équations membranaires.

Équations membranaires

$$(1.38) \quad \begin{cases} -D_\alpha T^{\alpha\beta}(\mathbf{v}^0) = f^\beta \text{ p.p. dans } \Omega \\ -b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}(\mathbf{v}^0) = f^3 \text{ p.p. dans } \Omega. \end{cases}$$

Les conditions aux limites qui peuvent être prises sont alors :

$$(1.39) \quad \mathbf{v}^0_{|\partial\Omega} = \vec{\sigma} \text{ ou bien } \begin{cases} \mathbf{v}^0_{|\partial_o\Omega} = \vec{\sigma} \\ T^{\alpha\beta}(\mathbf{v}^0)n_{\beta|\partial\Omega/\partial_o\Omega} = 0, \text{ bord libre} \\ \text{où } \partial_o\Omega \text{ correspond à la partie encastrée.} \end{cases}$$

Il est à noter qu'aucune condition aux limites n'est imposé sur la troisième composante puisque l'espace V^0 ne fait pas intervenir cette composante ni ses dérivées. En conséquence, la trace de v_3 sur $\partial\Omega$ ne peut être définie si bien qu'une partie des conditions d'encastrement sont perdues. Ceci est tout à fait normal, puisque nous avons affaire à un problème de perturbations singulières.

1.3.1 Problème limite réduit, Conditions limites admissibles et continuité de la forme linéaire

Problème limite réduit

Nous avons vu que la seconde forme fondamentale permettait de préciser la nature elliptique, parabolique et hyperbolique de la surface envisagée (cf. la section 1.2 de ce même chapitre), suivant que le signe de la quantité $b_{12}^2 - b_{11}b_{22}$ était négatif, nul ou positif. Dans le présent paragraphe on ne s'intéresse qu'aux surfaces hyperboliques, ce qui veut dire qu'en tout point de la surface on peut définir les lignes asymptotiques. Puisque la surface est hyperbolique, la quantité $b_{12}^2 - b_{11}b_{22}$ est positive, il est donc loisible de prendre pour lignes coordonnées les lignes asymptotiques avec pour choix de paramétrisation celui pour lequel on a $b_{12} \neq 0$ et $b_{11} = 0, b_{22} = 0$. Puisque b_{12} est défini à partir de la carte locale $(\Omega, \vec{\Psi})$, et que $\vec{\Psi}$ est supposée être au moins de classe $C^2(\Omega)$ alors il en résulte que b_{12} est régulier et borné.

En adoptant ce système de coordonnées, il est clair que les tenseurs de déplacements, ont pour nouvelles expressions (cf. [35]) :

$$(1.40) \quad \begin{cases} \gamma_{11} = v_{1,1} - \Gamma_{11}^1 v_1 - \Gamma_{11}^2 v_2 \stackrel{def}{=} E_{11}(\hat{\mathbf{v}}) \\ \gamma_{22} = v_{2,2} - \Gamma_{22}^1 v_1 - \Gamma_{22}^2 v_2 \stackrel{def}{=} E_{22}(\hat{\mathbf{v}}) \\ \gamma_{12} = \frac{1}{2}(v_{1,2} + v_{2,1}) - \Gamma_{12}^1 v_1 - \Gamma_{12}^2 v_2 - b_{12} v_3 \\ \stackrel{def}{=} E_{12}(\hat{\mathbf{v}}) - b_{12} v_3 \end{cases}$$

où $\hat{\mathbf{v}}$ est un vecteur de composante (v_1, v_2) , tangent à la surface.

Nous allons à présent expliciter la composante v_3^o en fonction de $\hat{\mathbf{v}}^o = (v_1^o, v_2^o)$. En effet, de la dernière équation membranaire (1.38 page 15) et de l'expression de T^{12} où $b_{11} = b_{22} = 0$ sauf b_{12} et où les $E_{\alpha\beta}$ ont été définis en (1.40 page 16) on a :

$$T^{12}(\hat{\mathbf{v}}^o) = A^{1211} E_{11}(\hat{\mathbf{v}}^o) + 2A^{1212}(E_{12}(\hat{\mathbf{v}}^o) - b_{12}v_3^o) + A^{1222} E_{22}(\hat{\mathbf{v}}^o)$$

d'où l'on tire l'expression de v_3^o :

$$(1.41) \quad v_3^o = \frac{f^3 + 2b_{12}A^{12\lambda\nu} E_{\lambda\nu}(\hat{\mathbf{v}}^o)}{4b_{12}^2 A^{1212}}$$

expression qui va nous permettre d'éliminer la composante v_3^o dans les équations membranaires.

On a :

$$(1.42) \quad \begin{cases} T^{11}(\hat{\mathbf{v}}^o) = A^{1111} E_{11}(\hat{\mathbf{v}}^o) + 2A^{1112}(E_{12}(\hat{\mathbf{v}}^o) - b_{12}v_3^o) + A^{1122} E_{22}(\hat{\mathbf{v}}^o), \\ T^{12}(\hat{\mathbf{v}}^o) = A^{1211} E_{11}(\hat{\mathbf{v}}^o) + 2A^{1212}(E_{12}(\hat{\mathbf{v}}^o) - b_{12}v_3^o) + A^{1222} E_{22}(\hat{\mathbf{v}}^o), \\ T^{22}(\hat{\mathbf{v}}^o) = A^{2211} E_{11}(\hat{\mathbf{v}}^o) + 2A^{2212}(E_{12}(\hat{\mathbf{v}}^o) - b_{12}v_3^o) + A^{2222} E_{22}(\hat{\mathbf{v}}^o). \end{cases}$$

où la quantité $E_{12} - b_{12}v_3^o$ est connue et a pour expression :

$$(1.43) \quad E_{12} - b_{12}v_3^o = \frac{-f^3 - 2b_{12}A^{1211} E_{11} - 2b_{12}A^{1222} E_{22}}{4b_{12}A^{1212}}$$

Substituant cette expression dans le système (1.42 page 16) on obtient :

$$(1.44) \quad \begin{cases} T^{11}(\hat{\mathbf{v}}^o) = \sum_{\delta=1}^2 (A^{11\delta\delta} - \frac{A^{1112} A^{12\delta\delta}}{A^{1212}}) E_{\delta\delta}(\mathbf{v}^o) - \frac{f^3 A^{1211}}{2b_{12}A^{1212}}, \\ T^{22}(\hat{\mathbf{v}}^o) = \sum_{\delta=1}^2 (A^{22\delta\delta} - \frac{A^{2212} A^{12\delta\delta}}{A^{1212}}) E_{\delta\delta}(\mathbf{v}^o) - \frac{f^3 A^{1222}}{2b_{12}A^{1212}}. \end{cases}$$

La formulation variationnelle nous conduit à :

$$(1.45) \quad \mathcal{P} = \begin{cases} \text{étant donnée } \mathbf{f} \in (\hat{V}^o)', \text{ trouver } \hat{\mathbf{v}}^o \in \hat{V}^o \text{ tel que,} \\ \hat{a}_o(\hat{\mathbf{v}}^o, \hat{\mathbf{w}}) = \langle \mathbf{f}, \hat{\mathbf{w}} \rangle_{\hat{V}^o, \hat{V}^o} \quad \forall \hat{\mathbf{w}} \in \hat{V}^o. \end{cases}$$

où \hat{V}^o désigne l'espace complété pour la norme déduite de \hat{a}_o de l'espace \hat{V} défini par :

$$\hat{V} = \{ \hat{w}, \hat{w} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \text{ satisfaisant aux conditions aux limites} \}$$

et où l'on a posé

$$(1.46) \quad \begin{cases} \hat{a}_o(\hat{\mathbf{v}}^o, \hat{\mathbf{w}}) = \sum_{\alpha, \beta, \lambda, \nu=1}^2 \int_{\Omega} \hat{A}^{\alpha\beta\lambda\nu} E_{\lambda\nu}(\hat{\mathbf{v}}^o) E_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{w}}) dS, \\ \langle \mathbf{f}, \hat{\mathbf{w}} \rangle_{\hat{V}^o, \hat{V}^o} = \int_{\Omega} \left(\sum_{\alpha=1}^2 f^\alpha w_\alpha + \sum_{\lambda, \nu=1}^2 \frac{f^3 A^{12\lambda\nu}}{2b_{12} A^{1212}} E_{\lambda\nu}(\hat{\mathbf{w}}) \right) dS. \end{cases}$$

Ce problème est appelé problème limite réduit (cf. [35]), les coefficients $\hat{A}^{\alpha\beta\lambda\nu}$ sont les coefficients réduits définis par :

$$(1.47) \quad \hat{A}^{\alpha\beta\delta\mu} = A^{\alpha\beta\delta\mu} - \frac{A^{\alpha\beta 12} A^{12\delta\mu}}{A^{1212}}$$

Par ailleurs nous remarquons que :

$$(1.48) \quad \hat{A}^{12\delta\mu} = A^{12\delta\mu} - \frac{A^{1212} A^{12\delta\mu}}{A^{1212}} = 0, \quad \lambda, \mu \in [1..2]$$

On a ainsi ramené le problème initial (1.38 page 15) à un problème dans lequel ne figure plus que les composantes tangentielles.

Remarque 1.3.1 *On remarquera que les composantes E_{12} ne figurent pas dans la forme bilinéaire \hat{a}_o puisque les $\hat{A}^{12\delta\mu} = 0$ mais dans la forme linéaire $\langle \mathbf{f}, \hat{\mathbf{w}} \rangle_{\hat{V}^o, \hat{V}^o}$.*

Théorème 1.3.3 *Les coefficients réduits satisfont aux propriétés de symétrie par rapport aux indices.*

$$(1.49) \quad \hat{A}^{\alpha\beta\lambda\nu} = \hat{A}^{\lambda\nu\alpha\beta} = \hat{A}^{\beta\alpha\lambda\nu}$$

De plus, il existe deux réels positifs C_1 et C_2 tels que l'on a

$$(1.50) \quad C_2(E_{11}^2 + E_{22}^2) \leq \hat{A}^{\alpha\beta\lambda\nu} E_{\lambda\nu} E_{\alpha\beta} \leq C_1(E_{11}^2 + E_{22}^2) \quad \forall E_{\alpha\beta} \text{ symétriques}$$

Par ailleurs, on a le théorème suivant :

Théorème 1.3.4 *La forme bilinéaire a_o est symétrique et satisfait à l'estimation suivante*

$$(1.51) \quad C_2 \int_{\Omega} (E_{11}^2 + E_{22}^2) \leq \hat{a}_o(\hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}}) \leq C_1 \int_{\Omega} (E_{11}^2 + E_{22}^2)$$

Les démonstrations de ces deux théorèmes figurent dans [35].

Conditions aux limites admissibles

Afin de pouvoir définir l'espace fonctionnel associé à la forme bilinéaire \hat{a}_o il est nécessaire de prescrire les conditions aux limites appropriées. Comme nous le voyons les équations membranaires sont de nature hyperbolique. Puisque le problème est hyperbolique les solutions dépendent des conditions aux limites et ces dernières ne peuvent être imposées de façon quelconque. Ce qui signifie que la solution dépend de la disposition géométrique des caractéristiques, qui sont les coordonnées asymptotiques puisque nous avons fait le choix $b_{11}=b_{22}=0$ et $b_{12} \neq 0$. Par ailleurs, nous traitons le cas des surfaces inhibées. Avec le choix de coordonnées effectué, le système de rigidité se trouve simplifié, en effet il prend la forme suivante :

$$(1.52) \quad \begin{cases} D_1 v_1 = 0, \\ D_2 v_2 = 0, \\ D_1 v_2 + D_2 v_1 - 2b_{12} v_3 = 0. \end{cases}$$

On remarque que si $v_1=v_2=0$ alors cela implique que $v_3=0$, par conséquent l'unicité se réduit à l'étude des deux premières équations qui sont aussi de nature hyperbolique. En outre, les caractéristiques de ce système sont les droites d'équation respective $x^1=cste$ et $x^2=cste$, c'est-à-dire les courbes asymptotiques.

Comment assurer l'inhibition d'une coque? (voir également [35]) La réponse à cette question relève d'un jeu de construction à la main. En effet, étant donné que le domaine Ω entrant dans la définition de la carte locale doit être contenu dans le domaine de détermination des courbes asymptotiques il suffira de raisonner sur le domaine Ω .

- 1) La marche à suivre est la suivante : on recherche les portions de frontières parallèles aux directions asymptotiques, que l'on désignera par frontière caractéristiques ceci afin de prescrire les bonnes conditions aux limites s'il y a lieu. Le reste de la frontière n'étant plus caractéristique, nous pourrons y imposer d'autres conditions aux limites (cf. figure 1.5 page 19).

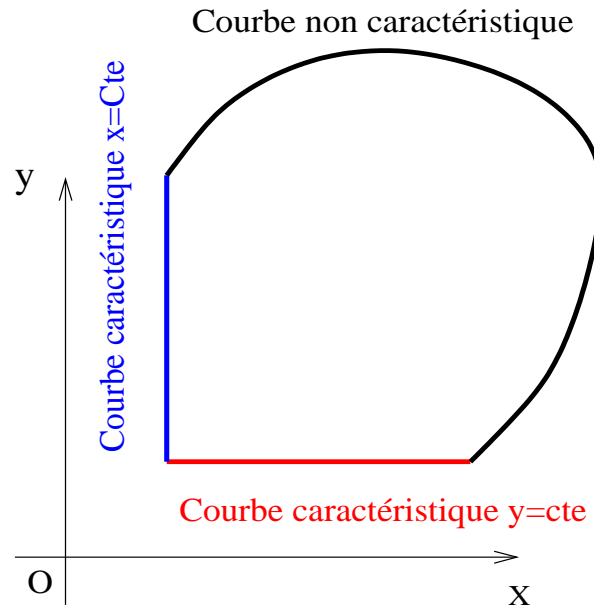


FIG. 1.5 – Exemple de recherche des frontières caractéristiques et non caractéristiques

- 2) On examine le domaine d'influence de la portion de frontière sur laquelle on désire imposer les conditions aux limites. Le domaine d'influence de la frontière sur laquelle est prescrite les conditions aux limites s'obtient en traçant les caractéristiques. À partir des points situés aux extrémités de la frontière où sont prescrite les conditions aux limites, on trace les caractéristiques. À partir de là, on regarde l'intersection de ces caractéristiques avec le domaine. La partie interceptée est alors inhibée (cf. figure 1.6 page 20).
- 3) Si le domaine est entièrement inclus dans cette intersection alors le choix des conditions aux limites sur la portion choisie engendre le caractère inhibé de la coque tout entière. En revanche si une partie du domaine reste en dehors de cette intersection seule la zone interceptée est inhibée et pas le reste de la coque qui par suite est non inhibée.

Nous rappelons enfin les différentes conditions aux limites qu'il est possible d'imposer et donnons quelques exemples.

1. $v_1=v_2=0$ sur toute portion de frontière non caractéristique.
2. $v_1=v_2=0$ sur une partie de la frontière non caractéristique et $T^{\alpha\beta}n_\beta=0$ sur le reste de la frontière.
3. $v_1=0$ et $v_2=0$ sur les portions de frontières parallèles aux caractéristique $x^1=cste$ et $x^2=cste$.

$$\delta\Omega = \delta\Omega_1 \cup \delta\Omega_2 = \text{Frontière du domaine}$$

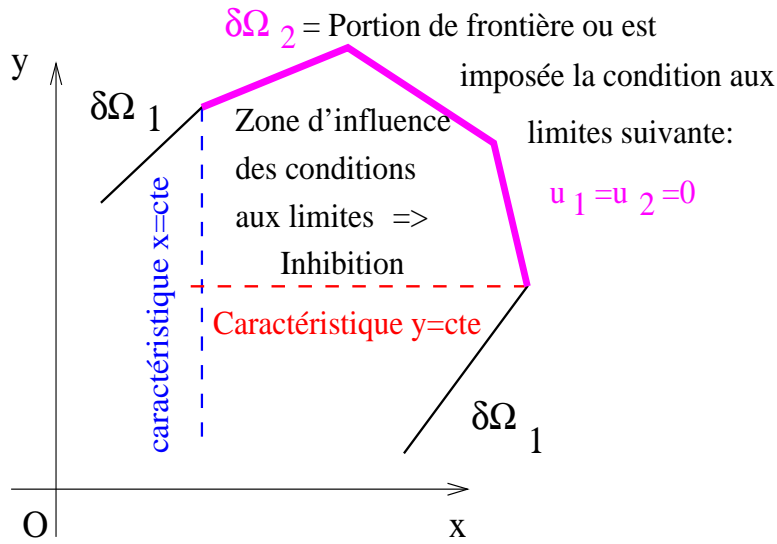


FIG. 1.6 – Visualisation de la zone d'influence des conditions aux limites entraînant l'inhibition

4. $v_1=0$ et $v_2=0$ sur les portions de frontières parallèles aux caractéristique $x^1=cste$ et $x^2=cste$ et $T^{\alpha\beta}n_\beta=0$ sur une partie ou la totalité de la frontière non caractéristique.

Exemple 1.3.1

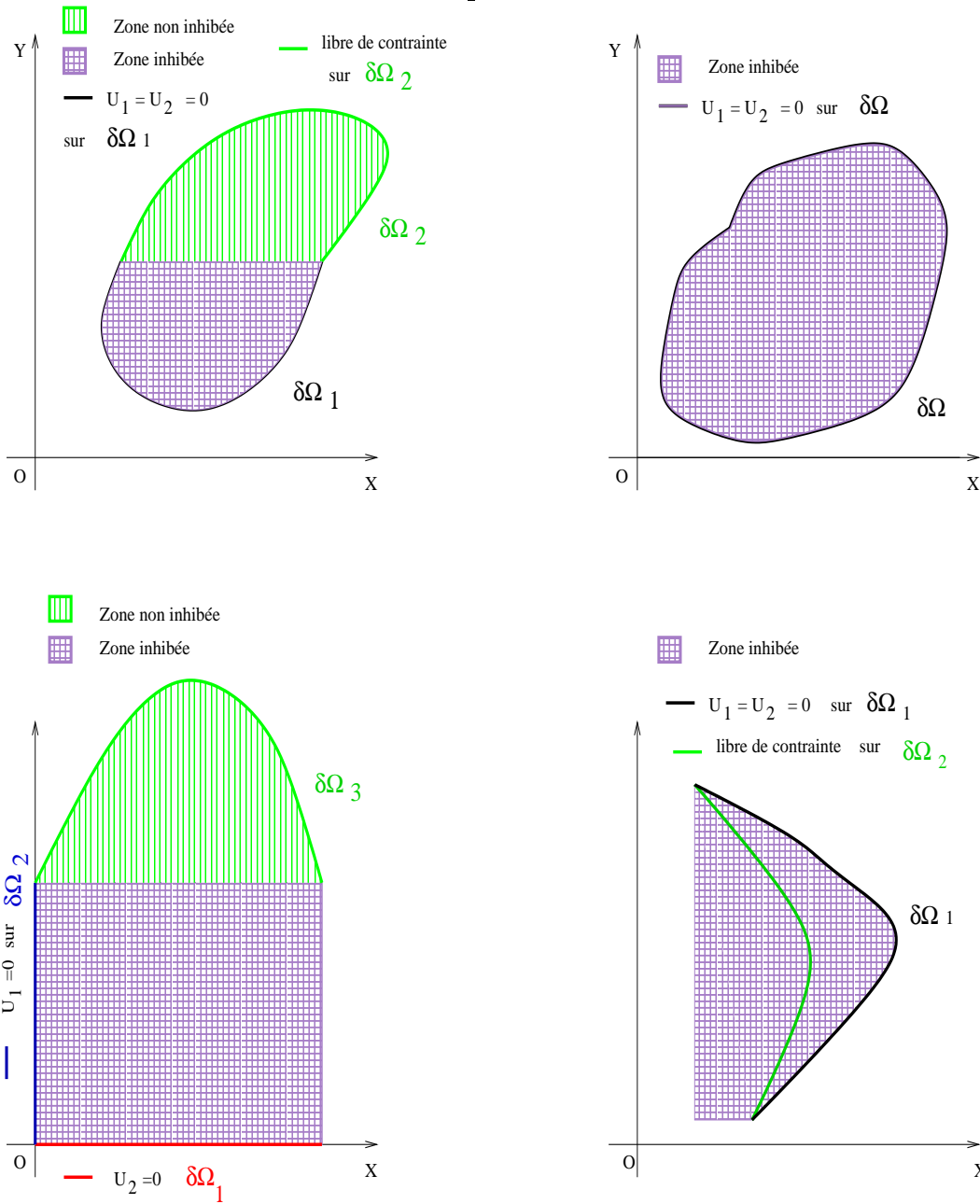


FIG. 1.7 – Exemples des zones inhibées pour les différentes sortes de conditions aux limites

Espace fonctionnel associé au problème limite réduit

Cette section est consacrée à l'étude de l'espace fonctionnel adapté au problème limite réduit. Pour cela considérons la forme bilinéaire du problème réduit :

$$(1.53) \quad \hat{a}_o(\hat{\mathbf{v}}^o, \hat{\mathbf{w}}) = \int_{\Omega} \hat{A}^{\alpha\beta\lambda\nu} E_{\lambda\nu}(\hat{\mathbf{v}}^o) E_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{w}}) \sqrt{a} dx^1 dx^2$$

où les $\hat{A}^{\alpha\beta\lambda\nu}$ sont les coefficients d'élasticité du problème réduit.

Désignons par \hat{V}^o l'espace d'énergie correspondant à la forme bilinéaire réduite (1.53). Cet espace est le complété pour la norme déduite de \hat{a}_o de l'espace

$$\hat{V} = \{ \hat{w}, \hat{w} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega), \text{ satisfaisant aux conditions aux limites} \}$$

On peut voir (cf. [35] section VII.2.3), en utilisant la théorie des systèmes hyperboliques, que les propriétés classiques des traces dans $L^2(\Omega)$ sont valables pour v_1 (resp. v_2) sur des courbes qui ne sont pas tangentes aux caractéristiques $y^2 = Cte$ (resp. $y^1 = Cte$). Les traces de v_1 (resp. v_2) sur des courbes tangentes $y^2 = Cte$ (resp. $y^1 = Cte$) n'ont pas de sens et les dérivées $\partial_2 v_1$ et $\partial_1 v_2$ se sont pas de classe $L^2(\Omega)$. En conséquence, dans le processus de complétion, les conditions aux limites qui ont un sens sont stables et sont satisfaites par tous les éléments de \hat{V}^o . Les autres conditions aux limites sont perdues par complétion. On a donc le théorème suivant :

Théorème 1.3.5 *Sous les hypothèses de régularité et d'uniforme hyperbolicité de la surface S , dans les exemples que nous considérons (cf. 1.7 page 21) on aura*

$$\hat{V} = \{ \hat{v} \in L^2(\Omega), (\partial_1 v_1, \partial_2 v_2) \in L^2(\Omega), \text{ satisfaisant aux conditions aux limites stables.} \}$$

où les coordonnées y^1 et y^2 sont associées aux courbes asymptotiques de la surface, les conditions aux limites stables étant celles qui sont imposées le long de courbes transversales aux caractéristiques $y^1 = Cte$ pour v_2 et $y^2 = Cte$ pour v_1

Forces admissibles et non régularité de la solution

Dans la sous section précédente l'étude de la forme bilinéaire réduite nous a permis de définir l'espace fonctionnel de travail à savoir \hat{V}^o , il nous reste à présent, à étudier, la forme linéaire sur ce même espace fonctionnel en fonction des champs de forces \mathbf{f} . Nous allons, afin de simplifier l'étude de cette forme linéaire, la scinder en deux morceaux $L_{\mathbf{f}}^1(\hat{\mathbf{w}})$ et $L_{\mathbf{f}}^2(\hat{\mathbf{w}})$.

$$(1.54) \quad \begin{cases} L_{\mathbf{f}}^1(\hat{\mathbf{w}}) = \int_{\Omega} \left[f^\lambda - \frac{A^{\alpha\beta 12} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda f^3}{2b_{12} A^{1212}} \right] w_\lambda dS, \\ L_{\mathbf{f}}^2(\hat{\mathbf{w}}) = \int_{\Omega} \frac{f^3 A^{\alpha\beta 12}}{4b_{12} A^{1212}} (w_{\alpha,\beta} + w_{\beta,\alpha}) dS. \end{cases}$$

Il apparaît clairement que l'étude de la continuité de $L_{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{w}})$ sera complexe puisque certaines des dérivées de $\hat{\mathbf{w}}$ qui y figurent sont de classe $L^2(\Omega)$, les autres non. En effet, dans la seconde forme linéaire $L_{\mathbf{f}}^2(\hat{\mathbf{w}})$ apparaît le terme $(w_{\alpha,\beta} + w_{\beta,\alpha})$ ceci veut donc dire que la quantité $(\partial_1 w_2 + \partial_2 w_1)$ y figure. On a mis en évidence dans [35] (section VII.2.4) des conditions suffisantes assurant la continuité de la forme linéaires $L_{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{w}})$. La norme naturelle sur l'espace \hat{V}^o est donnée par :

$$\|\hat{\mathbf{v}}\|_{\hat{V}^o} = \|\hat{\mathbf{v}}\|_{L^2} + \|\vec{\nabla} \hat{\mathbf{v}}\|_{L^2}$$

Alors, en utilisant une notation classique introduite par Lions [24] on a :

$$\hat{V}^o \subset \int_{\oplus} H_{x^1}^1(x^2) dx^2 \times \int_{\oplus} H_{x^2}^1(x^1) dx^1$$

Si bien que le dual de $\hat{V}^{o'}$ satisfait à :

$$\hat{V}^{o'} \supset \int_{\oplus} (H_{x^1}^1(x^2))' dx^2 \times \int_{\oplus} (H_{x^2}^1(x^1))' dx^1$$

En prenant alors $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3) \in \hat{V}^{\circ'} \times L^2(\Omega)$ la fonctionnelle $L_{\mathbf{f}}^1$ sera continue et bornée. On notera que dans ce cas particulier l'ensemble des solutions $\hat{\mathbf{u}}$ remplit l'espace \hat{V}° .

Pour la seconde forme linéaire, il suffit de faire apparaître grâce à l'intégration par parties les termes de bord sur $\partial\Omega$ et les termes dans Ω . Les termes sur Ω conduisent à une forme linéaire continue et bornée en revanche les termes sur le bord $\partial\Omega$ font intervenir les quantités suivantes :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f^3 A^{1212}}{4b_{12}A^{1212}} [v_1 n_2 + v_2 n_1] ds$$

Or cette intégrale n'a de sens que sur les portions de frontières qui ne sont pas parallèles aux caractéristiques. Comme v_2 (resp v_1) ne s'annule pas sur cette portion de frontière en imposant à f^3 d'être nulle sur les portions de frontières parallèles aux caractéristiques, on donne un sens à la seconde forme linéaire $L_{\mathbf{f}}^2(\hat{\mathbf{w}})$. Ceci nous conduit donc au premier résultat suivant.

Lemme 1.3.6 *Les fonctions $(f^1, f^2) \in \hat{V}^{\circ'}$ ainsi que la fonction $f^3 \in H^1(\Omega)$ dont la trace s'annule sur les portions de frontières parallèles aux caractéristiques définissent une fonctionnelle continue sur \hat{V}° .*

Tout ceci nous conduit donc au théorème principal de cette section, qui consiste à pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram au problème limite réduit.

Théorème 1.3.7 *Soit $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3) \in \hat{V}^{\circ'} \times H^1(\Omega)$. Si la fonction f^3 est à trace nulle sur les portions de frontières parallèles aux caractéristiques, alors le problème suivant :*

trouver $\hat{\mathbf{v}}^{\circ}$ dans \hat{V}° satisfaisant à

$$\hat{a}_o(\hat{\mathbf{v}}^{\circ}, \hat{\mathbf{w}}) = L_{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{w}}) \quad \forall \hat{\mathbf{w}} \in \hat{V}^{\circ}$$

a une solution unique. De plus, l'ensemble des solutions $\hat{\mathbf{v}}^{\circ}$ parcourt l'espace \hat{V}° lorsque les \mathbf{f} satisfont au lemme précédent 1.3.6 (cf. page 24).

Il ne faut pas perdre de vue que ce théorème ne concerne que les composantes tangentielles, et que la troisième composante est évaluée par la formule (1.41 page 16). On montre (cf. [35] section IV.2.4) que la composante u_3° n'est pas en général une fonction régulière mais une distribution comme le montre l'exemple construit à cet effet [35, page: 225].

Chapitre 2

Relation entre l'épaisseur ε et le pas de maillage h

Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter une série de simulations numériques faites à l'aide du code *Modulef* pour des coques minces hyperboliques inhibées. En mécanique une coque est qualifiée de mince si en tout point $\Phi(M)$ de la surface moyenne S l'épaisseur, encore notée e , est au plus de l'ordre de $\frac{1}{10} \min(R_{N1}, R_{N2})$ (cf. section 1.1.4 page 5). La formulation adoptée dans ce code de calcul est celle du modèle linéaire bidimensionnel de W.T. Koiter [22]. L'étude présentée dans ce chapitre concerne tout particulièrement le parabolöide hyperbolique encastré sur une partie ou la totalité de la frontière de manière à ce qu'il soit inhibé.

Dans le code *Modulef* il est possible d'appréhender le calcul des déplacements par des méthodes qualifiées de conformes ou non conformes. D'une manière générale, il n'est pas possible de résoudre analytiquement le problème (2.2). C'est pourquoi il est nécessaire de construire une suite d'espaces discrets V_h dans lesquels nous approcherons la solution du problème continu. L'approche conforme consiste à construire des espaces V_h de telle sorte que l'inclusion $V_h \subset V$ soit satisfaite.

Dans l'ouvrage de M. Bernadou [1], les différentes méthodes d'approximation conformes et non conformes sont étudiées en détail. Une étude est également présentée dans le cadre de l'approximation par facette plane. L'analyse des erreurs de consistance et la prise en compte des méthodes d'intégration numériques pouvant entacher les calculs sont prises en compte. Les méthodes conformes conduisent entre autre à l'utilisation des éléments finis d'Argyris pour approcher les déplacements ou encore par une combinaison d'éléments finis d'Argyris et Ganev. Parmi les éléments non conformes on trouve les éléments D.K.T. (Discrete Kirchhoff Triangle). Ils sont d'un usage très courant dans

l'industrie car plus souple à implémenter que les éléments finis d'Argyris-Ganev.

Dans ce chapitre nous étudions la qualité de l'approximation numérique du champ de déplacements normal par les éléments finis d'Argyris et Ganev dans le cas des coques très minces. Nous nous sommes particulièrement attachés à l'étude du rapport qui existe entre le paramètre épaisseur ε et le nombre de degrés de liberté nécessaire pour avoir une approximation numérique de qualité au fur et à mesure que nous faisons tendre le paramètre ε vers zéro. En effet, un point fondamental est que, contrairement à ce que l'on pourrait croire, la convergence $u_h^\varepsilon \rightarrow u^\varepsilon$ dans l'espace $V = H^1 \times H^1 \times H^2$ n'est pas uniforme par rapport à ε . Cela est une conséquence du fait que, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la solution exacte u^ε converge (dans le meilleur des cas) vers un élément de l'espace V^0 associé à la forme membranaire, alors $\|u^\varepsilon\|_V$ n'est pas bornée dans cet espace (si c'était le cas, la limite serait dans cet espace). En conséquence, la norme dans un espace tel que $H^5 \times H^5 \times H^6$ ne reste pas bornée lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Or c'est l'appartenance à cet espace (très petit) qui est supposée pour prouver la convergence en $O(h^4)$ de l'approximation par éléments finis de Ganev-Argyris, c'est dire que le coefficient dans l'estimation correspondante explose (i.e. tend vers l'infini lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$).

Dans l'ouvrage [35] théorème VI.1.9, il est clairement établi que la solution pour une coque inhibée converge vers la solution du problème limite (cf. section 1.3 page 12). Par ailleurs, nous avons cherché à voir l'influence du maillage sur la qualité de l'approximation c'est pourquoi des séries de tests numériques ont été réalisés à l'aide d'un maillage issu d'un mailleur structuré ou non structuré.

Enfin, dans une dernière partie nous comparons les résultats des tests numériques effectués par M. Bernadou avec les nôtres. Il faut préciser que les tests numériques présentés dans l'ouvrage de M. Bernadou (cf. [1, p.109-110 et p. 135-137]) ont été effectués dans l'approche conforme et non conforme et seul les courbes et résultats numériques des simulations avec les éléments finis DKT, qui sont de type non conforme, sont présentés. Par ailleurs, comme nous le verrons, le paramètre ε n'est pas petit de surcroît la courbure de la coque est relativement faible. Quant à nous, nous avons effectué les mêmes tests avec les éléments finis d'Argyris et Ganev dont nous présentons les résultats.

2.1 Paraboloïde hyperbolique à forte courbure

Nous savons [35] que la solution du problème mécanique dans le cas des coques inhibées converge pour $\varepsilon \searrow 0$ vers le problème limite (cf. section 1.3 page 12). Afin d'illustrer ce comportement d'un point de vue numérique nous allons faire une série de simulations numériques.

Nous désignons par \mathcal{E} l'espace euclidien rapporté à un repère orthonormal $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On considère le domaine Ω_r suivant : $\Omega_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leq r\}$ et on désigne par

S la surface moyenne de classe C^∞ de \mathcal{E} , paramétrée par la carte locale (Ω_r, Ψ) définie de la manière suivante :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \vec{\Psi} : \Omega &\longrightarrow S \subset \mathcal{E} \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, Kxy) \end{aligned}$$

où K désigne la profondeur de la coque. L'image du domaine de référence (cf. figure 2.1 page 27) par l'application considérée donne la coque qui est un parabololoïde hyperbolique dont la forme est une selle de cheval (cf. figure 2.2 page 28).

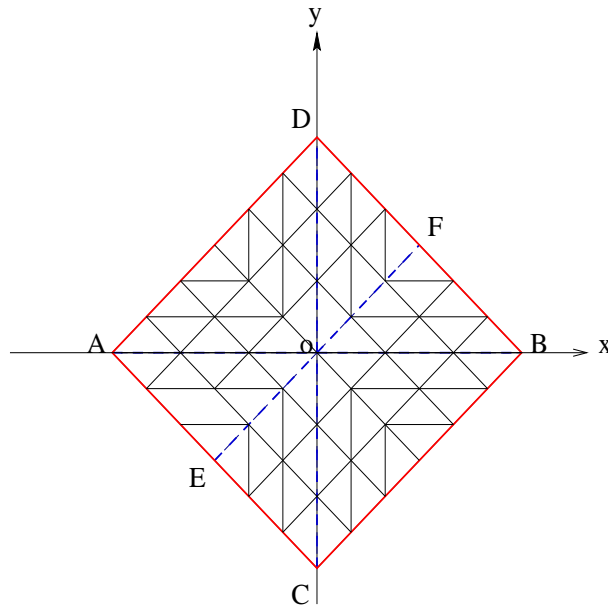


FIG. 2.1 – Domaine maillé dans son intégralité

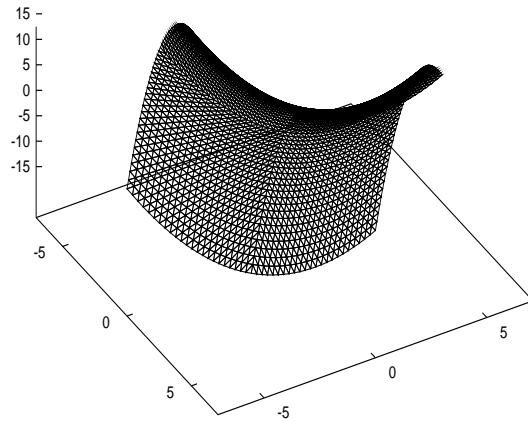


FIG. 2.2 – Visualisation de la coque

Nous désignerons par $\vec{a}_\alpha = \partial_\alpha \Psi$ et \vec{N} respectivement les vecteurs tangents et normal unitaire à la surface. Le choix de la paramétrisation fait donc correspondre les lignes asymptotiques avec les lignes coordonnées.

À partir de la représentation géométrique de la surface moyenne nous obtenons les vecteurs tangents et normal unitaire :

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, Ky), \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, Kx), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + K^2(x^2 + y^2)}}(-Ky, -Kx, 1).$$

Les coefficients de la première forme fondamentale ont alors pour expressions :

$$a_{11} = 1 + K^2y^2, \quad a_{12} = K^2xy, \quad a_{22} = 1 + K^2x^2.$$

Les coefficients de la deuxième forme fondamentale sont :

$$b_{11} = b_{22} = 0, \quad b_{12} = \frac{K}{\sqrt{1 + K^2(x^2 + y^2)}}.$$

Les expressions des vecteurs \mathbf{a}^1 et \mathbf{a}^2 sont :

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{1 + K^2(x^2 + y^2)}(1 + K^2x^2, -K^2xy, Ky),$$

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{1 + K^2(x^2 + y^2)}(-K^2xy, 1 + K^2y^2, Kx).$$

Les seuls symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{K^2y}{1 + K^2(x^2 + y^2)}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{K^2x}{1 + K^2(x^2 + y^2)}.$$

Le modèle linéaire de Koiter appliqué à une coque élastique d'épaisseur ε totalement encadrée, conduit à la formulation variationnelle suivante :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \vec{u}^\varepsilon \in \mathbf{V} = \{\vec{v} \in H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^2\} \text{ tel que,} \\ a_0(\vec{u}^\varepsilon, \vec{v}) + \varepsilon^2 a_1(\vec{u}^\varepsilon, \vec{v}) = L_{\bar{f}}(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V. \end{cases}$$

Puisque nous traitons le cas d'une coque totalement encadrée elle est donc inhibée. L'étude asymptotique [35] montre que les solutions \vec{u}^ε convergent vers $u^0 \in V^0$ solution du problème membranaire suivant :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \vec{u}^o \in \mathbf{V}^o \text{ tel que,} \\ a_0(\vec{u}^o, \vec{v}) = L_f(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V^o. \end{cases}$$

où nous avons posé :

$$(2.4) \quad \begin{cases} a_o(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} A^{\alpha\beta\delta\mu} \gamma_{\delta\mu}(\vec{u}) \gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) \sqrt{a} dx^1 dx^2, \\ a_1(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{12} \int_{\Omega} A^{\alpha\beta\delta\mu} \rho_{\delta\mu}(\vec{u}) \rho_{\alpha\beta}(\vec{v}) \sqrt{a} dx^1 dx^2, \\ \gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} v_{\beta} + \partial_{\beta} v_{\alpha}) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} v_{\lambda} - b_{\alpha\beta} u_3, \\ \rho_{\alpha\beta}(\vec{v}) = \partial_{\alpha} \partial_{\beta} u_3 - \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} \partial_{\delta} u_3 - b_{\alpha}^{\delta} b_{\delta\beta} u_3 + D_{\alpha} (b_{\beta}^{\delta} u_{\delta}) + b_{\alpha}^{\delta} D_{\beta} u_{\delta}, \\ A^{\alpha\beta\delta\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} [a^{\alpha\delta} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\delta} + \frac{2\nu}{(1-\nu)} a^{\alpha\beta} a^{\delta\mu}], \\ \sqrt{a} = \sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{cases}$$

Dans cette section, nous présentons une série de simulations numériques issues du code Modulef. Nous nous intéressons à l'approximation de la composante normale du champ de déplacements pour des épaisseurs ϵ très petites et pour des profondeurs K importantes. Nous essayons d'exhiber une relation entre les paramètres ϵ et le pas de maillage \mathbf{h} (i. e. le sup des diamètres des triangles) destiné à tendre vers zéro. Les différents tests présentent une série de pas de maillage \mathbf{h} pour chaque ϵ fixé. Nous considérons alors que la solution numérique est stable si l'on montre que la convergence a lieu pour des \mathbf{h} inférieurs à un certain pas de maillage \mathbf{h}_o . La plus grande difficulté consiste à déterminer le paramètre \mathbf{h}_o .

2.1.1 Paraboloïde hyperbolique sous pression uniforme

Les caractéristiques réelles du matériau sont les suivantes : le module d'Young E est fixé à 2.85×10^4 kp.cm⁻², le coefficient de Poisson ν à 0.4. La force \vec{f} extérieure à laquelle est soumise la coque est une pression uniforme qui s'exerce normalement sur cette coque (i.e. $\vec{f} = p\vec{a}_3$). Le champ scalaire p est fixé à 1×10^{-2} kp.cm⁻². Le maillage proposé pour les simulations numériques est de type structuré et est réalisé à l'aide de triangles.

Nous faisons varier successivement quatre paramètres qui sont, la profondeur K , les dimensions du domaine c'est-à-dire \mathbf{r} , l'épaisseur ϵ ainsi que le pas du maillage \mathbf{h} (i.e. max. des diamètres des triangles recouvrant le domaine). Nous regardons ensuite les valeurs prises par la composante normale des déplacements en des points particuliers, l'un de ces points est l'origine. Nous avons reporté sur les figures (cf. figure 2.5 page 34)

les valeurs de $U_3(0)$ en fonction du nombre de degrés de liberté (plus exactement pour des \mathbf{h} décroissants), des paramètres ϵ et de la dimension du domaine Ω_r .

Afin de bien comprendre le point fondamental de la discussion qui suit, nous avons en plus du point de coordonnées $(0,0)$, visualisé les valeurs de la composante normale de quatre autres points notés respectivement M_1, M_2, M_3, M_4 concernant le premier test c'est-à-dire lorsque $K=1$ et $r=2$. Les coordonnées des points M_1, M_2, M_3, M_4 sont respectivement $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $(\frac{7\sqrt{2}}{10}, 0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{3}, 0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$. Nous avons représenté les valeurs de la composante normale $U_3(M_i)$ pour $i \in [1..4]$ sur les figures (cf. figure 2.3 page 32).

Nous remarquons dans un premier temps que si le nombre de degrés de liberté n'est pas suffisant nous n'obtenons pas les bonnes valeurs de la composante normale des déplacements aux points considérés. Par ailleurs, l'insuffisance des degrés de liberté se traduit par la présence de forte variation des valeurs numériques même quand on se trouve loin de la frontière (cf. graphe de $U_3(M1)$ et $U_3(M3)$). En effet les points M_1 et M_3 sont respectivement situés au milieu et au tiers du segment [OB] contrairement au point M_4 , qui se trouve sur le segment [OF] proche de la frontière. En revanche, si le nombre des degrés de libertés augmente, nous obtenons une sorte de stabilisation avec néanmoins de petites oscillations. Ces oscillations certes faibles finissent par disparaître totalement au fur et à mesure que l'on accroît le nombre de degrés de liberté. Les valeurs numériques de la composante normale de déplacements aux points considérés convergent alors vers leurs valeurs limites respectives pour un nombre de degrés de liberté convenable ce qui correspond à un pas de maillage que nous qualifierons d'optimal.

Nous avons également représenté les valeurs de la composante normale de deux autres points notés respectivement N_1, N_2 concernant le second test, c'est-à-dire pour $r = 5$ et $K = 1$. À la différence du premier test, ces deux points sont situés sur le tiers central du segment [OB]. Nous remarquons (cf. figure 2.4) la présence d'irrégularités si le pas de maillage n'est pas convenable. En faisant décroître le pas de maillage de manière convenable on arrive à faire disparaître ces irrégularités et à converger vers la valeur limite.

Enfin, sur les figures (cf. figures 2.3,2.4 ,2.5), nous avons reporté les valeurs de ces mêmes points concernant le problème limite réduit. Elles figurent sur les courbes avec la mention $\epsilon = 0, (P_1)(ou(P_2))$. Nous remarquons deux choses. L'absence d'irrégularités. L'utilisation des éléments finis P_2 assure une convergence beaucoup plus rapide que les éléments finis P_1 .

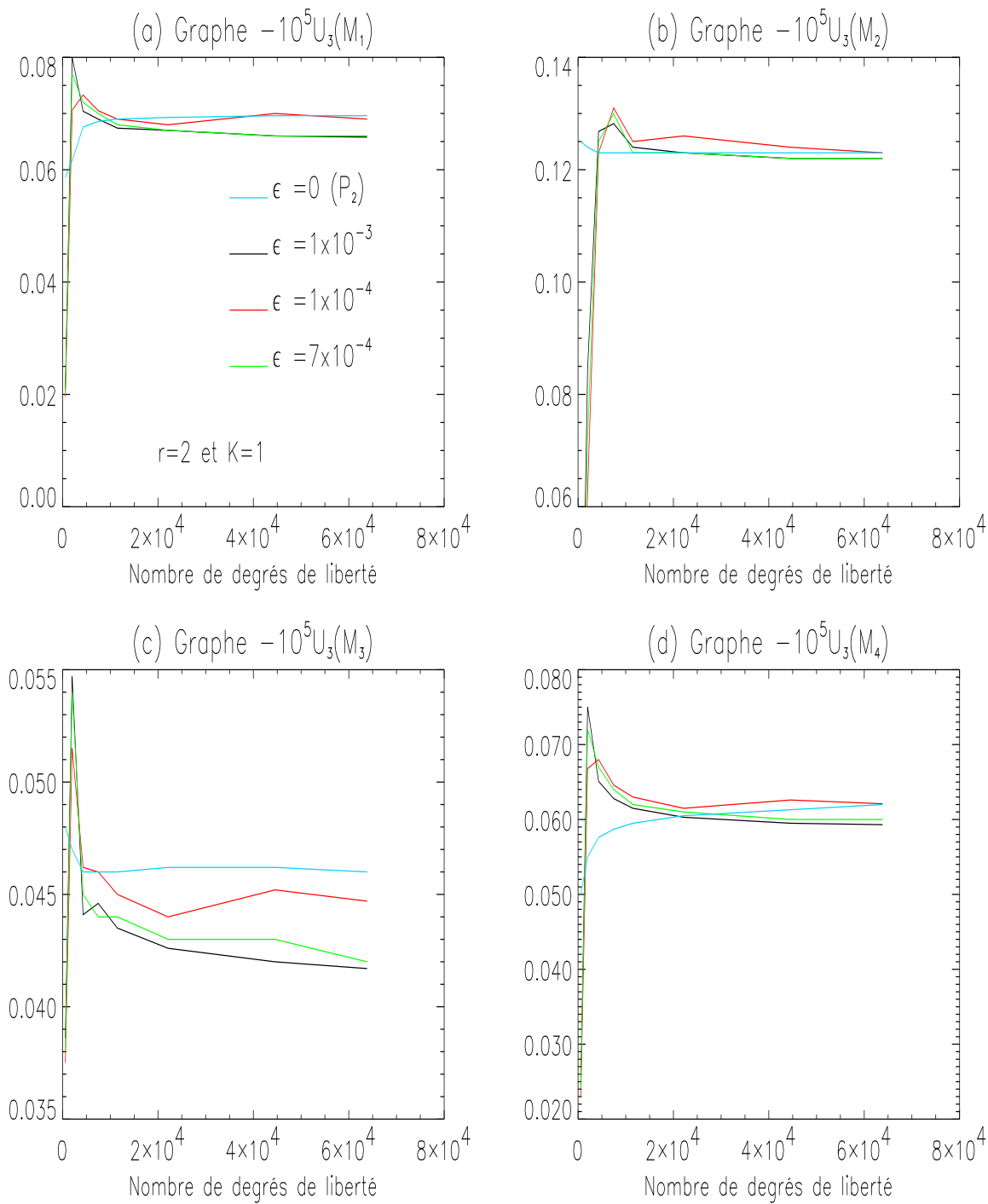


FIG. 2.3 – Comparaison des valeurs $u_3(M_1), \dots, u_3(M_4)$ en fonction du nombre de degrés de liberté et du paramètre ϵ

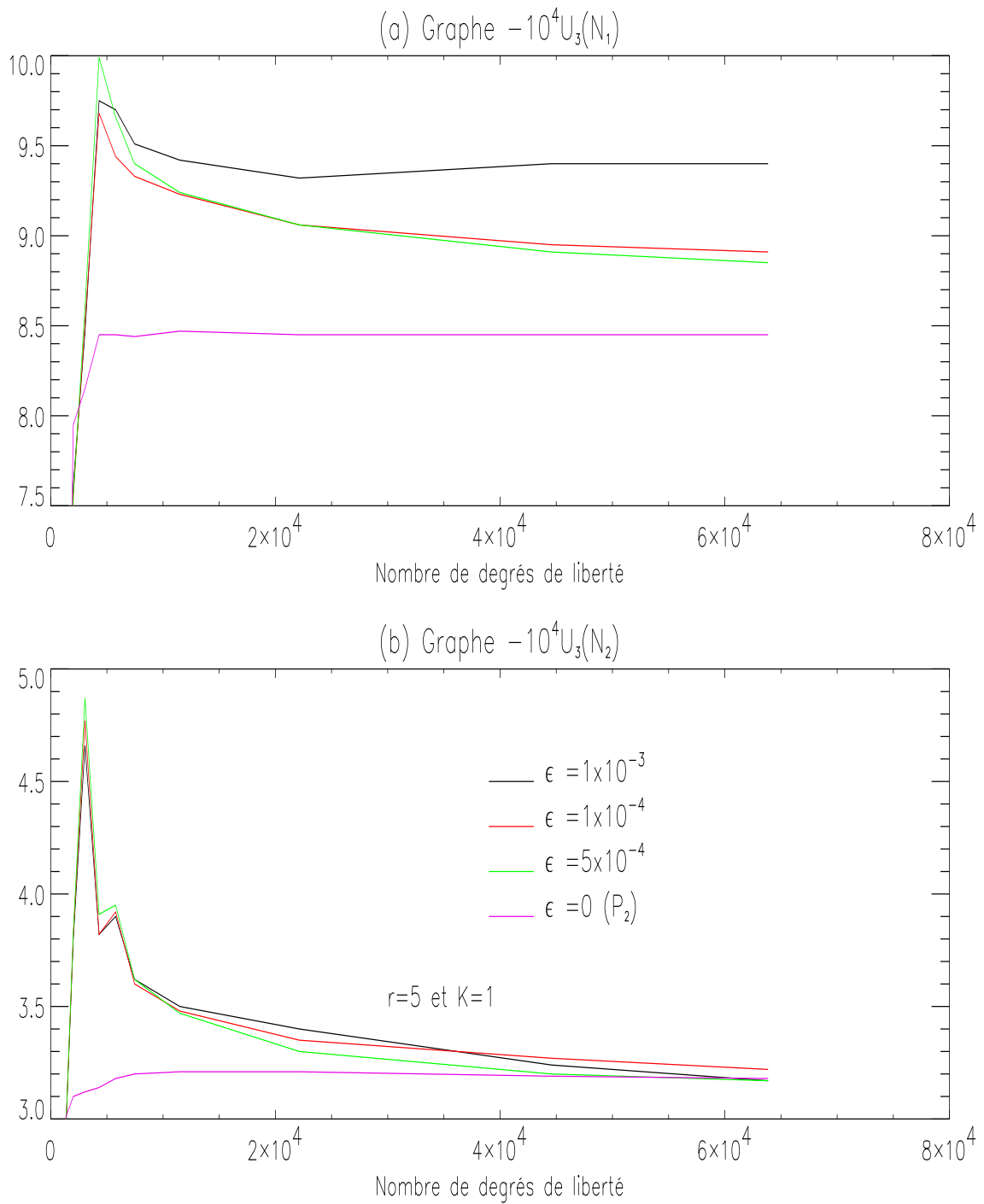


FIG. 2.4 – Comparaison des valeurs $u_3(N_1), u_3(N_2)$ en fonction du nombre de degrés de liberté et du paramètre ϵ

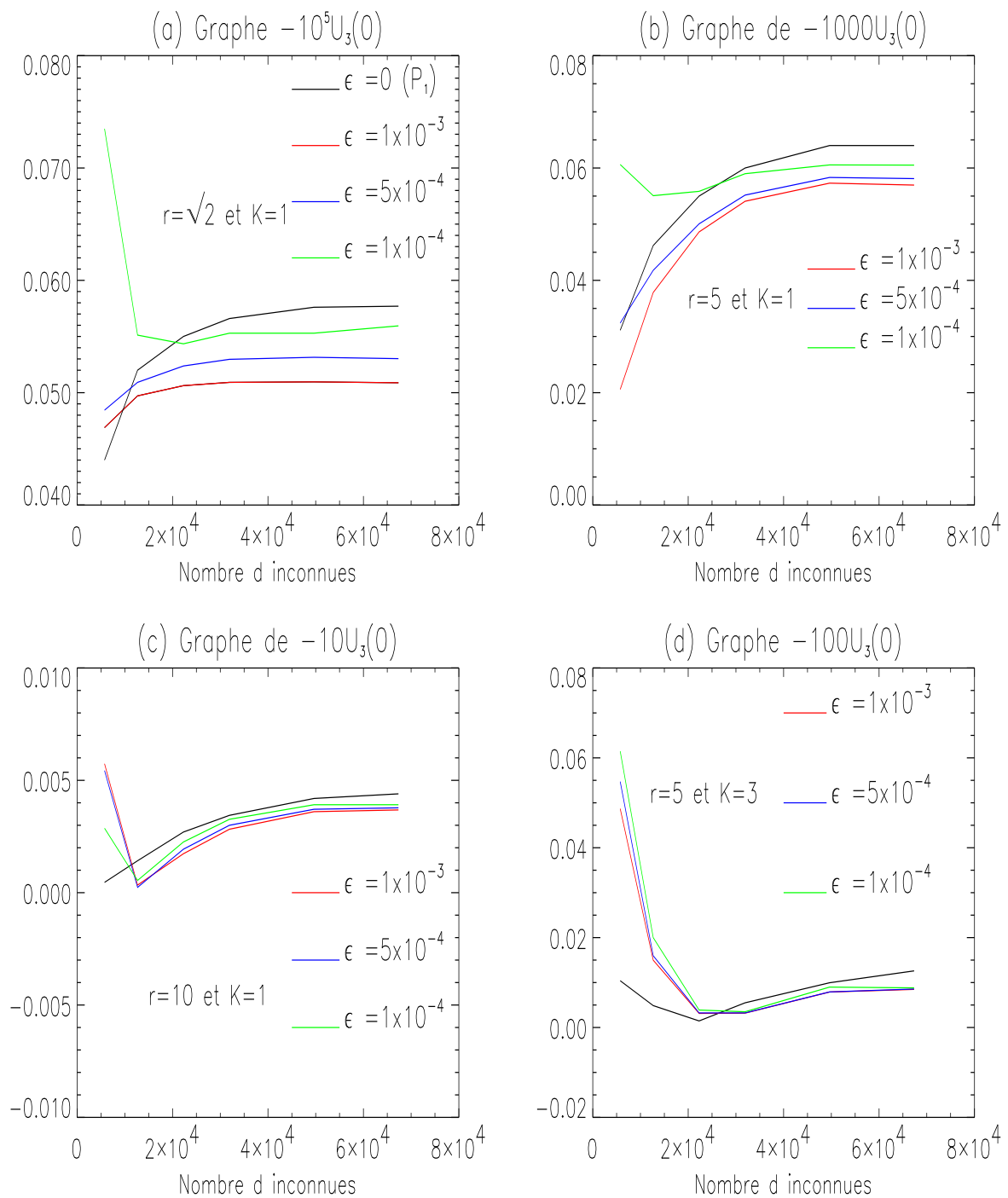


FIG. 2.5 – Comparaison des valeurs $u_3(0)$ en fonction du nombre de degrés de liberté et du paramètre ϵ

Il nous semble également intéressant de comparer certaines courbes entre elles. Pour chaque paramètre r ou K fixé, les courbes représentent les coupes de la composante normale du déplacement le long des segments $[AB]$ et $[CD]$ (cf. figure 2.1 page 27) pour différentes valeurs des paramètres ϵ et le pas du maillage \mathbf{h} , enfin nous superposons toutes les courbes pour faire apparaître l'influence des différents paramètres, et notamment les paramètres ϵ et \mathbf{h} . Nous avons également reporté sur ces courbes la courbe u_{3h}^o solution du problème limite (2.3). Il est impossible de représenter toutes les courbes pour les différents cas tests effectués, c'est pourquoi nous présentons uniquement les courbes les plus significatives c'est-à-dire celles obtenues par le procédé suivant : le paramètre K étant respectivement fixé à 1,3 et 5, nous donnons successivement à r les valeurs 1,5,10 et en ce qui concerne ϵ , il varie dans l'intervalle $[10^{-3}..10^{-4}]$. On augmente le nombre de degrés de liberté, c'est-à-dire que l'on fait décroître le pas du maillage \mathbf{h} , jusqu'à observer une stabilisation de la convergence, qui est notre critère d'arrêt, ce qui nous donne le paramètre \mathbf{h}_0 . optimal.

Dans la première série de courbes 2.6 (cf. page 36), 2.7 (cf. page 37), 2.8 (cf. page 38), les paramètres r , K et ϵ sont respectivement fixés à $[1,1, 10^{-3}, 10^{-4}]$ et les pas de maillage \mathbf{h}_0 convenables sont respectivement 3.210^{-2} et 2.210^{-2} . En effet, considérons le cas où ϵ est fixé à 1×10^{-4} . Fixons le nombre de nœuds respectivement à 11 et 21, ce qui correspond à des $h = 5.9 \times 10^{-2}$ et $h = 3.2 \times 10^{-2}$. Sur les figures 2.6 et 2.7 (3^{ieme} coupe, en bas à gauche de la page 44 et 45), nous remarquons que pour ces choix du couple (ϵ, h) la partie centrale des courbes présente des irrégularités alors que si nous accroissons le nombre de nœuds nous obtenons une représentation fidèle de la solution. La figure 2.8 (cf. page 38) permet d'apprécier la qualité de la convergence de u_{3h}^ϵ vers u_{3h}^o . Dans la seconde série de courbes les paramètres r , K et ϵ sont respectivement fixés à $[5,1, 10^{-3}, 10^{-4}]$ et les pas de maillage \mathbf{h}_0 convenables sont respectivement 3.210^{-2} et 2.210^{-2} .

Pour la troisième série de courbes les paramètres r , K et ϵ sont fixés respectivement à $[10,1, 10^{-3}, 10^{-4}]$ et les pas de maillage \mathbf{h}_0 convenables sont respectivement 3.210^{-2} et 2.210^{-2} .

Enfin , la dernière série de courbes 2.9 (cf. page 39), 2.10 (cf. page 40), 2.11 (cf. page 41), les paramètres r , K et ϵ sont respectivement fixés à $[5,5, 10^{-3}, 10^{-4}]$ et les pas de maillage \mathbf{h}_0 convenables sont respectivement 3.210^{-2} et 2.210^{-2} . la figure 2.11 (cf. page 41) permet d'apprécier la qualité de la convergence.

Toutes ces figures mettent en évidence qu'il existe bien un rapport entre le paramètre ϵ et le pas de maillage.

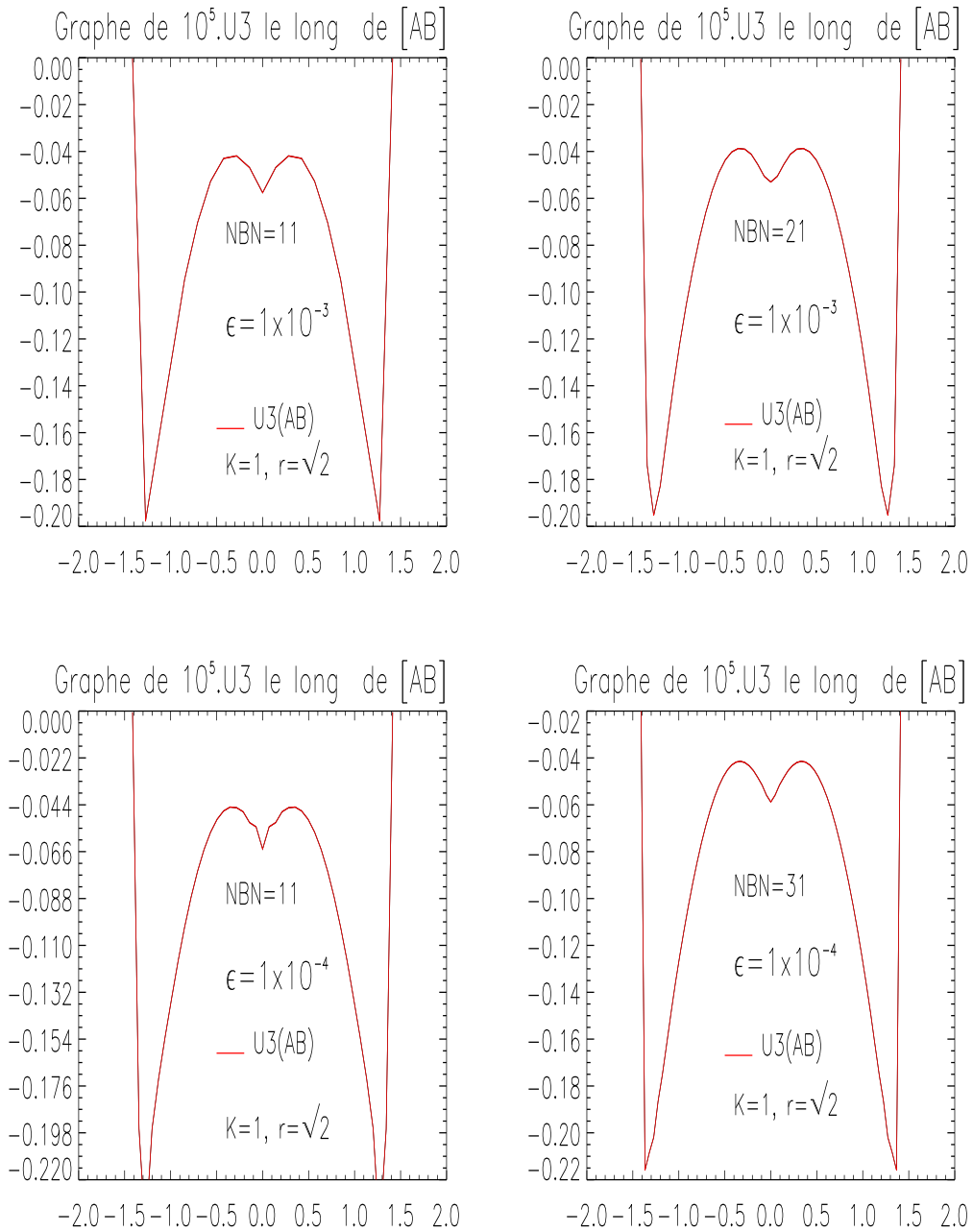


FIG. 2.6 – Coupes de u_3 le long de l'axe $[AB]$ pour différentes valeurs du paramètre ϵ et du nombre de nœuds. $K=1$, $r=2$

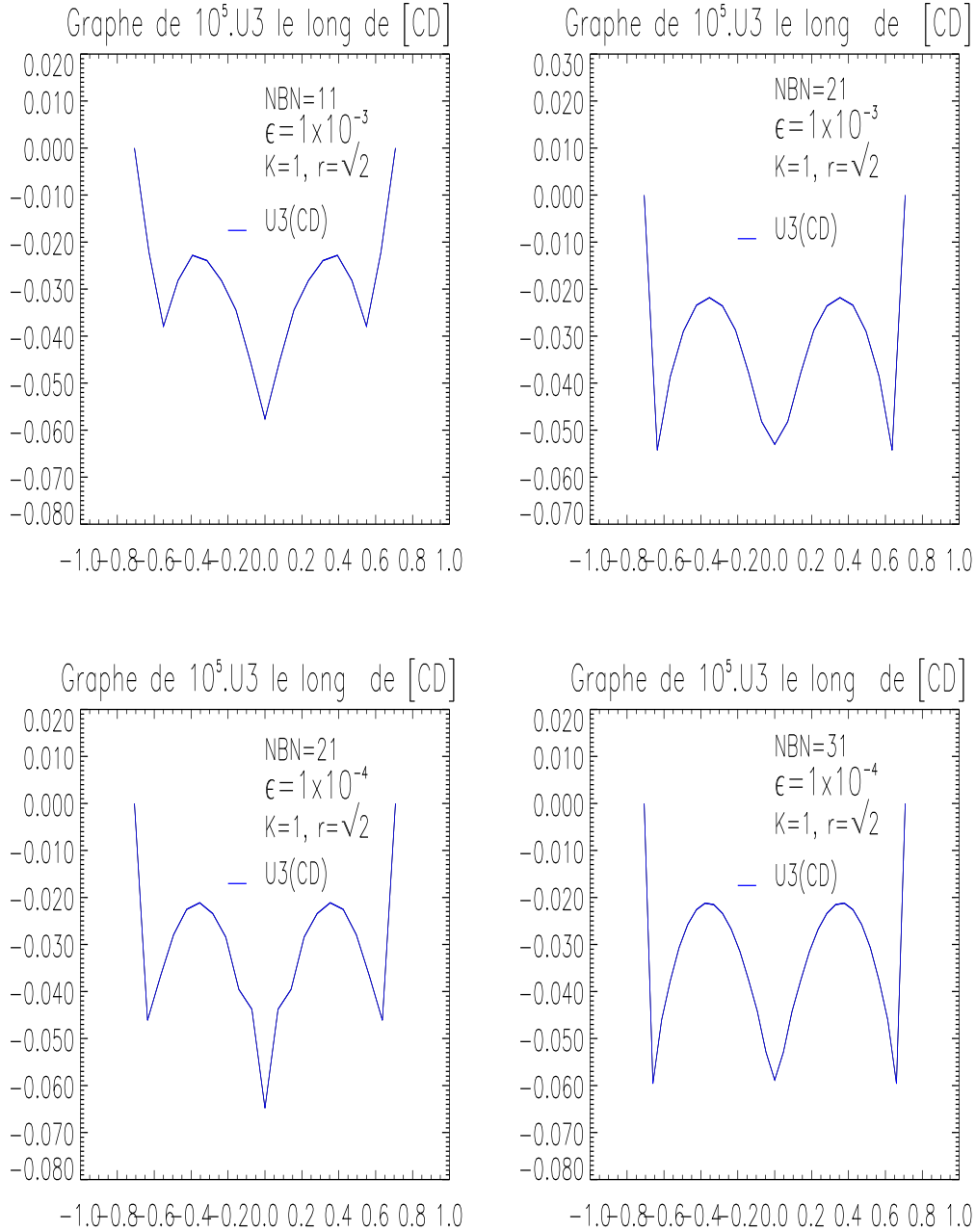


FIG. 2.7 – Coupes de u_3 le long de l'axe $[CD]$ pour différentes valeurs du paramètre ϵ et du nombre de nœuds. $K=1$, $r=2$

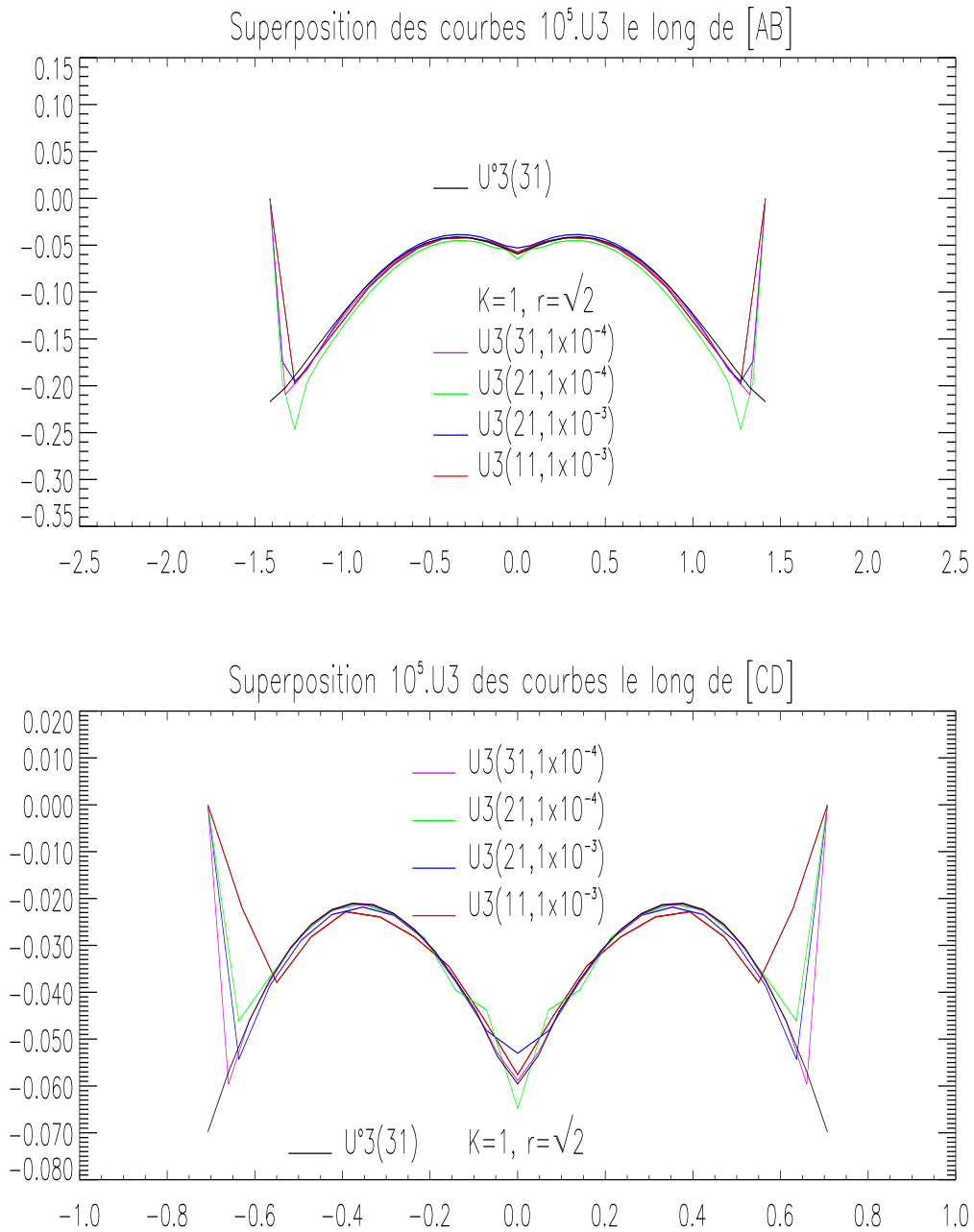


FIG. 2.8 – Comparaison des différentes coupes le long des axes [AB] et [CD] en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ε . $K=1$, $r=2$

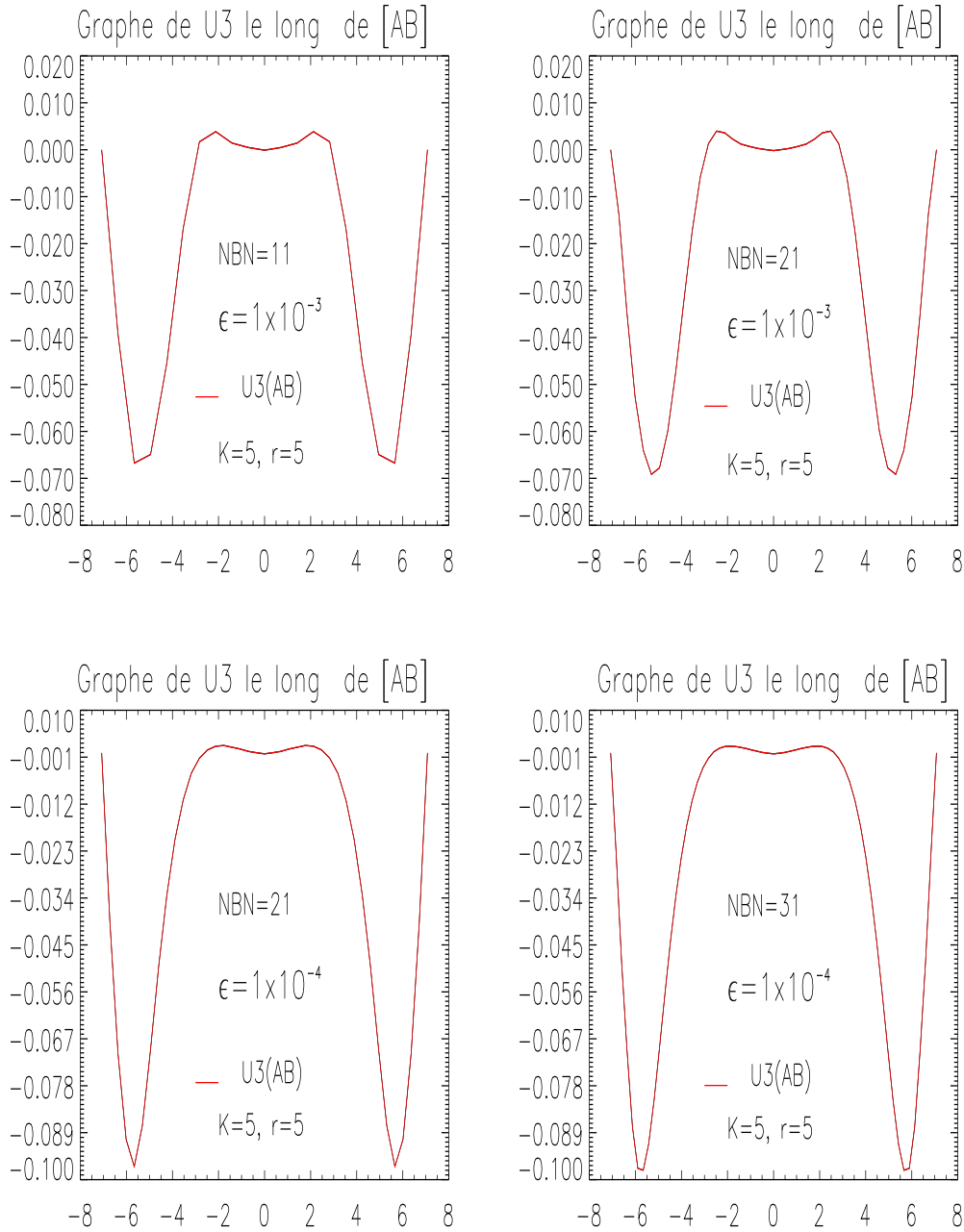


FIG. 2.9 – Coupes de u_3 le long de l'axe $[AB]$ pour différentes valeurs du paramètre ϵ et du nombre de nœuds. $K=5$, $r=5$

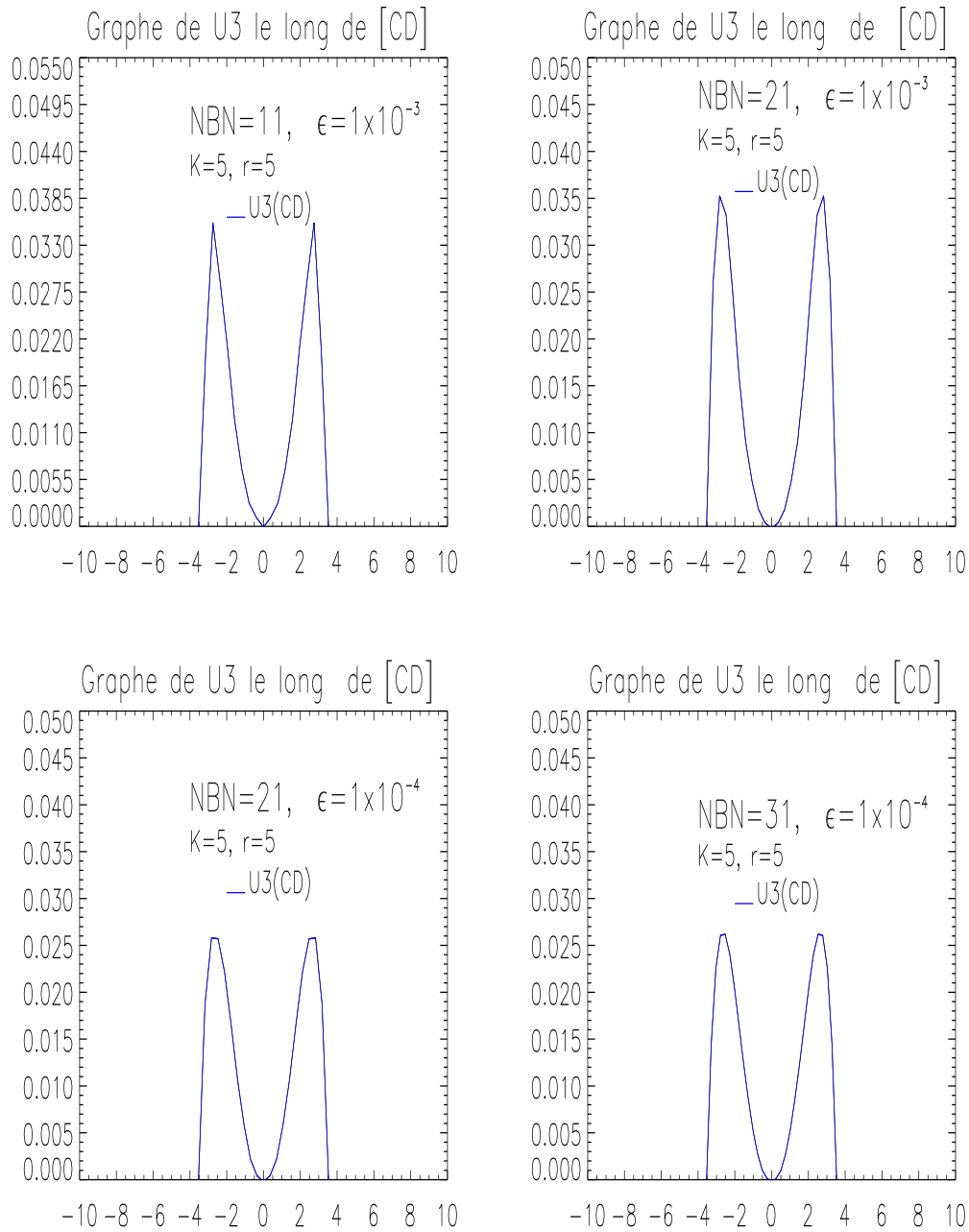


FIG. 2.10 – Coupes de u_3 le long de l'axe $[CD]$ pour différentes valeurs du paramètre ϵ et du nombre de nœuds. $K=5$, $r=5$

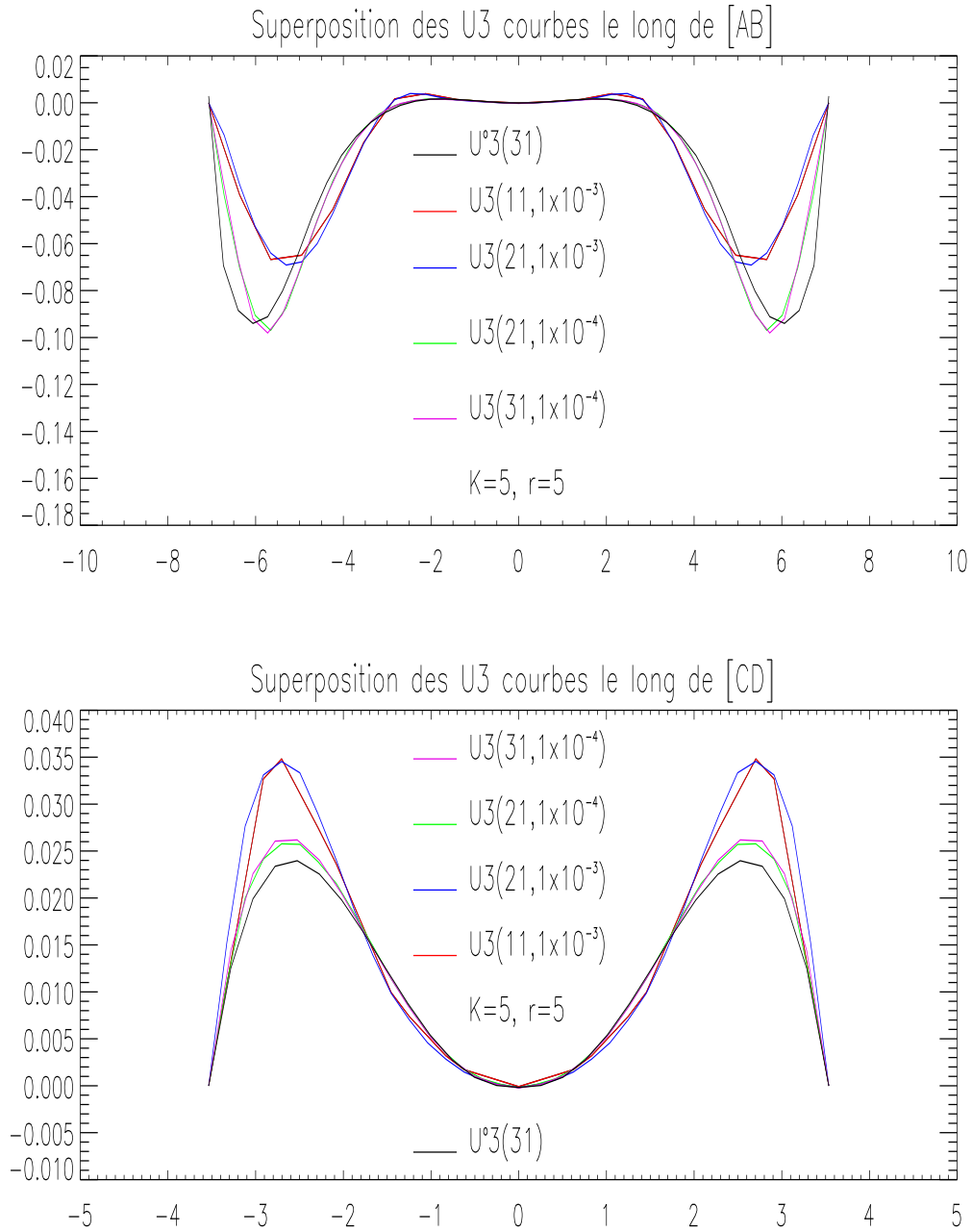


FIG. 2.11 – Comparaison des différentes coupes le long des axes [AB] et [CD] en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ε . $K=5, r=5$

2.1.2 Conclusion

À partir de ces différents tests numériques nous constatons qu'il existe une relation entre les paramètres \mathbf{h} , ε , \mathbf{r} et K . Pour chaque ε fixé, il existe un pas de maillage \mathbf{h}_o pour lequel on observe une stabilisation de la convergence. La valeur \mathbf{h}_o peut parfois être très petite ce qui induit un grand nombre de degrés de liberté d'où des temps de calcul très importants. Les paramètres qui influent sur la convergence sont dans l'ordre : la profondeur K , puis la dimension de la coque (i.e. \mathbf{r}) car alors le rapport de l'épaisseur à cette longueur caractéristique tend vers zéro. En effet, plus l'un de ces paramètres est grand plus rapide sera la convergence et ceci pour des valeurs de ε relativement grandes (cf. graphe (c) et (d) de la figure 2.5 page 34)

Le comportement limite des coques hyperboliques inhibées n'apparaît qu'à partir d'un seuil minimal du paramètre ε . Celui-ci doit en effet être inférieur ou égal à 10^{-3} . Afin d'obtenir un calcul des solutions numériques satisfaisant il est nécessaire de trouver un pas de maillage \mathbf{h}_o fonction du paramètre ε suffisamment petit. Pour des valeurs de $h \leq \mathbf{h}_o$ on ne constate pas d'amélioration de la précision mais plutôt une stabilisation de la convergence. Il existe donc un compromis à trouver, ce qui est loin d'être trivial puisque \mathbf{h}_o tend vers zéro quand $\varepsilon \searrow 0$. Un nombre insuffisant de degrés de liberté génère des irrégularités dans les solutions numériques.

Cependant, pour les cas tests numériques que nous avons étudiés, nous avons constaté que si nous satisfaisons une relation de la forme $\mathbf{h} \propto \varepsilon$ pour les composantes tangentielles et une relation de la forme $\mathbf{h} \propto \sqrt{\varepsilon}$ pour la composante normale alors, nous obtenons des résultats cohérents et suffisamment précis. Le résultat le plus marquant de cette étude est que la relation qui existe entre le paramètre ε et \mathbf{h} est linéaire pour les composantes tangentielles et non linéaire pour la composante normale. Par ailleurs, si l'on satisfait globalement la relation $\mathbf{h} \propto \varepsilon$ les résultats numériques sont bons. Ce résultat est certes empirique pour le moment et sa justification nécessite un travail préalable qui ne rentre pas dans le cadre de ce mémoire.

2.1.3 Détermination de \mathbf{h}_o

Dans cette sous section nous explicitons la manière dont nous avons procédé pour déterminer le pas de maillage \mathbf{h}_o en fonction de l'épaisseur ε . En effet, quand ε tend vers zéro cela entraîne que \mathbf{h}_o doit tendre aussi vers zéro. La valeur de \mathbf{h}_o peut parfois être très petite, ce qui induit un grand nombre de degrés de liberté d'où des temps de calcul très importants car on utilise les éléments finis de Ganev et Argyris qui ont une précision en $O(h^4)$, en conséquence, plus on augmente le nombre de degrés de liberté, plus volumineuses sont les matrices de rigidité. Sur les figures 2.5 2.3 (cf. page 34 et page 32) nous constatons que les courbes tendent vers une ou des asymptote(s) horizontale(s). Ces asymptotes peuvent être confondues comme le montrent les graphiques (c) et (d) de la figure 2.5 (cf. page 34). Par ailleurs, à chaque épaisseur ε fixée cor-

respond une asymptote. Il suffit alors de repérer sur l'axe des abscisses le nombre de degrés de liberté. Le nombre de degrés de liberté est alors lié par une formule au pas de maillage \mathbf{h} . Cette formule dépend du choix des triangles. Dans notre cas nous avons fait le choix de triangles isocèles rectangles par conséquent, si nous subdivisions, de manière équidistante, les côtés du domaine nous obtenons la relation suivante :

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\sqrt{2}(N + 1)} \quad \text{où } N \text{ est le nombre de subdivision par côté.}$$

Par ailleurs, le principe de dichotomie, permet d'établir la nature de la relation qui existe entre le pas de maillage \mathbf{h} et ε . Dans les exemples que nous avons traités nous avons constaté que la nature de cette relation est de la forme $\mathbf{h} \propto \varepsilon$ et $\mathbf{h} \propto \sqrt{\varepsilon}$.

Il est facile de comprendre que si l'on satisfait globalement la relation $\mathbf{h} \propto \varepsilon$ les solutions numériques sont bonnes. En effet traçons les courbes d'équations respectives $\mathbf{h} \propto \varepsilon$ et $\mathbf{h} \propto \sqrt{\varepsilon}$ (cf. figure 2.12 page 44)

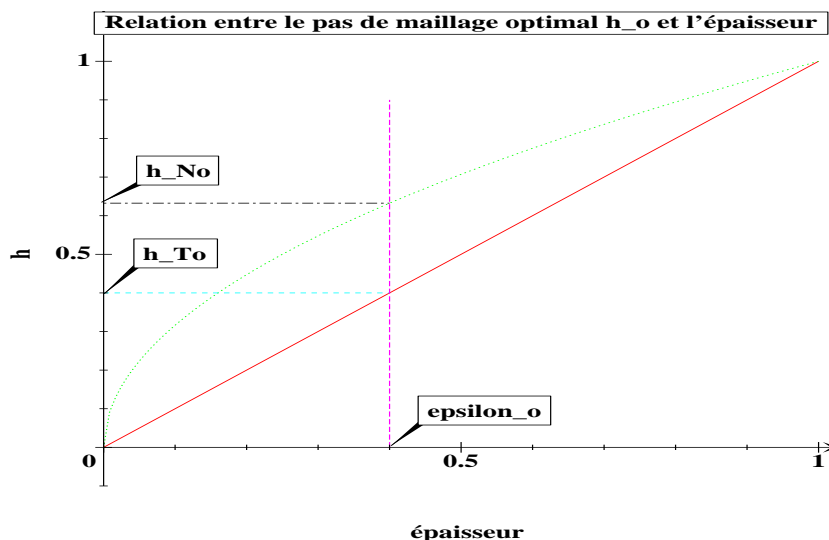


FIG. 2.12 – Graphes représentatifs de $h = \varepsilon$ et $h = \sqrt{\varepsilon}$

Pour un ε_o fixé nous obtenons deux valeurs pour le pas de maillage h . L'un de ces pas de maillage noté h_{To} correspondant aux composantes tangentielles et l'autre noté h_{No} , correspondant à la composante normale. Soit en prenant le minimum des deux nous obtenons le pas de maillage optimal $h_o = \min(h_{To}, h_{No}) = h_{To}$.

2.2 Paraboloïde hyperbolique à faible courbure

Les tests numériques présentés dans l'ouvrage de M. Bernadou (cf. [1]), sont des benchmarks classiques, pour vérifier la validité et la qualité de l'approximation. Le cas qui nous intéresse tout particulièrement est celui du paraboloïde hyperbolique encastré sur toute sa frontière. En effet, il s'agit d'une coque uniformément hyperbolique inhibée. Cependant, dans l'ouvrage les courbes et valeurs présentées ne concernent pas les éléments finis conformes (Argyris-Ganev) mais les éléments finis non conformes (D.K.T "Discrete Love Kirchhoff"). Par ailleurs, l'épaisseur de la coque n'est pas très petite et le maillage utilisé est très grossier. Comme l'épaisseur reste raisonnable il semble qu'il ne soit pas nécessaire de raffiner de manière significative le maillage pour avoir une meilleure approximation des déplacements. C'est pourquoi dans cette section nous entreprenons d'étudier l'influence du paramètre d'épaisseur sur le calcul du champ des déplacements à partir des tests présentés dans l'ouvrage de M. Bernadou, mais avec des éléments finis conformes. Nous poussons les calculs aussi loin que possible (c'est-à-dire les limites autorisées par les stations Sun et alpha) afin de mettre en évidence le lien qui existe entre l'épaisseur et le pas de maillage. Dans la section 2.2.1 (cf. page 45) nous rappelons brièvement le cas test envisagé dans l'ouvrage de M. Bernadou [1, p. 109-110, 135-137] et présentons des résultats relatifs à ce cas.

2.2.1 Paraboloïde hyperbolique sous pression uniforme

Le test qui est présenté dans l'ouvrage de Bernadou a été aussi étudié par Connor et Brebia [8, 1967], Kanok-Nukulchai [18, 1979], Meek et Tan [29, 1986]. Il s'agit d'une coque hyperbolique (cf. figure 2.13 page 46) soumise à une pression uniforme sur toute la surface. Les caractéristiques du matériau sont les suivantes : le module d'Young E est fixé à $28500.0 \text{ kp.cm}^{-2}$, le coefficient de Poisson ν à 0.4 et la pression qui s'exerce sur cette coque est de 0.01 kp.cm^{-2} . La coque, est paramétrée par une carte locale (Ω, Ψ) , où le domaine de référence (cf. figure 2.1 page 27) est un carré dont les côtés \mathbf{a} sont fixés à 100 cm , la coque a une épaisseur e de 0.8 cm et l'application servant à paramétrer la coque est donnée par :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \Psi : \Omega &\longrightarrow S \subset \mathcal{E} \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, K(y^2 - x^2)) \end{aligned}$$

L'image du domaine de référence par l'application considérée donne le paraboloïde hyperbolique (cf. figure 2.13 page 46).

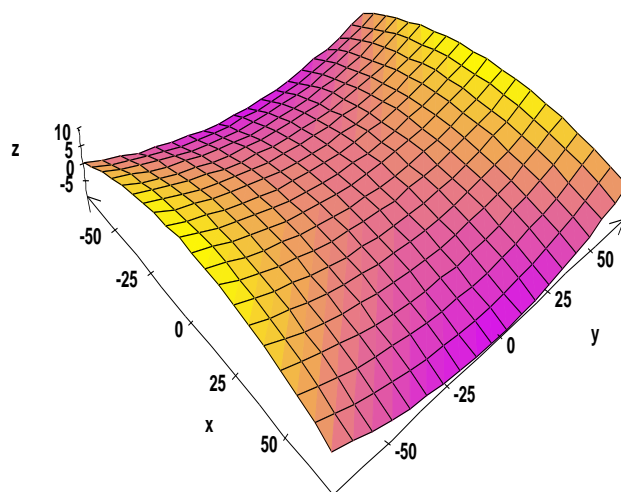


FIG. 2.13 – Visualisation de la coque

K est la profondeur de la surface. Elle est fixée à 2.10^{-3} , par conséquent il s'agit d'une coque peu profonde. Par ailleurs, du fait de la symétrie du problème mécanique il suffit de mailler le quart de la coque. Le maillage proposé est de type structuré et est réalisé à l'aide de triangles (cf. figure 2.14 page 48).

Posons $\frac{e}{a}$ le rapport de l'épaisseur rapporté aux longueurs, ce qui correspond à 8.10^{-3} pour cet exemple, pour une profondeur de $K=2.10^{-3}$. Nous avons donc affaire à une coque peu profonde, certes mince, mais relativement épaisse pour que le comportement limite soit apparent. Dans l'ouvrage de M. Bernadou [1, p. 135-137], il est fait usage des éléments finis non conformes du type D.K.T. ("Discrete Kirchhoff Triangle"). Le maillage utilisé est du type structuré et ne comporte que 32 éléments, ce qui en fait un maillage très grossier compte tenu de la dimension de la coque. Nous avons pris le parti de refaire le même test mais cette fois avec des éléments finis conformes en utilisant les triangles d'Argyris-Ganev et nous avons fait varier deux paramètres qui sont l'épaisseur " e " et le nombre d'éléments. Plutôt que de raisonner sur le pas du maillage " h ", nous faisons référence au nombre de nœuds "NBN." paramètre servant à la subdivision les contours géométriques du domaine. D'autre part nous précisons le nombre de degrés de liberté associé au paramètre NBN. Nous avons alors regardé la valeur de la composante normale du déplacement du point A de coordonnées "(0,0)", que nous avons reporté dans le tableau suivant :

e	NBN=5	NBN=7	NBN=15	NBN=21	NBN=25	NBN=31
0.8 (AG)	2.47×10^{-2} d.l.l.=1617	2.46×10^{-2} d.l.l.=3015	2.44×10^{-2} d.l.l.=12927	2.44×10^{-2} d.l.l.=24897	2.43×10^{-2} d.l.l.=35037	2.43×10^{-2} d.l.l.=53487
0.8 (DKT)	2.43×10^{-2}	2.44×10^{-2}	2.45×10^{-2}	2.46×10^{-2}	2.47×10^{-2}	2.47×10^{-2}

TAB. 2.1 – Comparaison des valeurs absolues au point A entre les éléments DKT et Argyris-Ganaev (AG) pour l'épaisseur $e=0.8$ et pour $f^e=p=0.01$.

e	NBN=5 d.l.l.=1617	NBN=7 d.l.l.=3015	NBN=15 d.l.l.=12927	NBN=21 d.l.l.=24897	NBN=25 d.l.l.=35037	NBN=31, d.l.l.=53487
0.08	1.574×10^{-2}	1.572×10^{-2}	1.569×10^{-2}	1.569×10^{-2}	1.569×10^{-2}	1.568×10^{-2}
0.1	1.560×10^{-2}	1.559×10^{-2}	1.558×10^{-2}	1.558×10^{-2}	1.558×10^{-2}	1.558×10^{-2}
0.01	1.512×10^{-2}	1.520×10^{-2}	1.523×10^{-2}	1.522×10^{-2}	1.522×10^{-2}	1.522×10^{-2}
0.001	1.544×10^{-2}	1.530×10^{-2}	1.523×10^{-2}	1.530×10^{-2}	1.53×10^{-2}	1.529×10^{-2}
0.0001	1.545×10^{-2}	1.537×10^{-2}	1.517×10^{-2}	1.525×10^{-2}	1.527×10^{-2}	1.529×10^{-2}
0.0 (P_1)	1.523×10^{-2}	1.526×10^{-2}	1.526×10^{-2}	1.527×10^{-2}	1.527×10^{-2}	1.527×10^{-2}

TAB. 2.2 – Valeurs absolues au point A pour les éléments d'Argyris-Ganaev (AG) pour différentes valeurs de l'épaisseur e et pour $f^e=e.p=0.01e$.

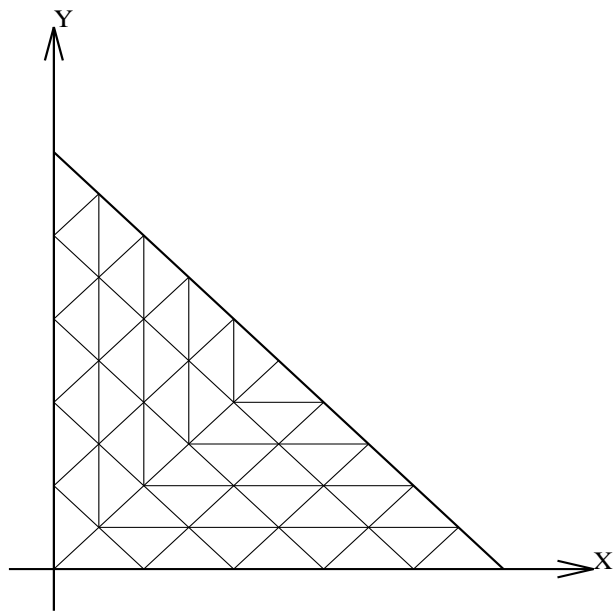


FIG. 2.14 – Quart du domaine maillé

Nous traçons ces valeurs en fonction du nombre de nœuds et du paramètre e nous obtenons la courbes représentées figure 2.15 (cf. page 49). Il faut remarquer que la profondeur de la coque est faible. En conséquence le caractère inhibé de la coque est atténué pour les très petites épaisseurs d'où une certaine dégradation de la convergence pour des épaisseurs très petites.

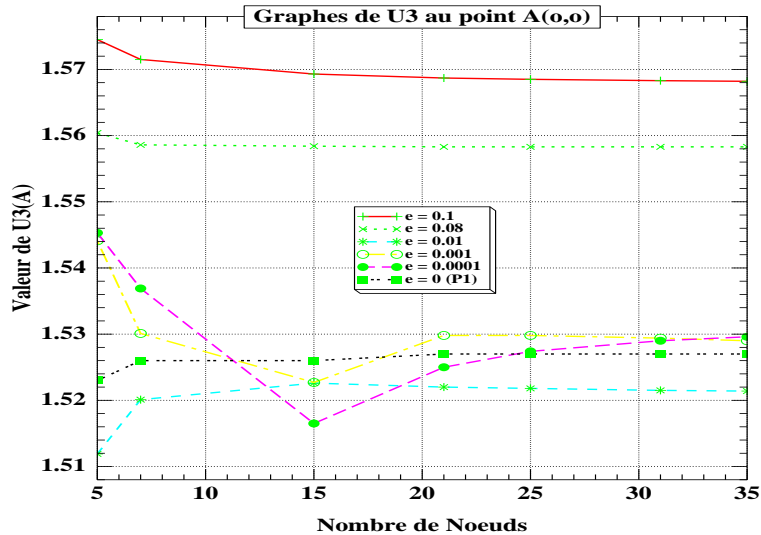


FIG. 2.15 – Comparaison des valeurs $u_3(A)$ en fonction du nombre de nœuds et du paramètre e

2.3 Commentaires

Sur ces courbes nous observons que la convergence est moins rapide lorsque le paramètre e devient très petit. Ces courbes nous montrent clairement que pour chaque paramètre d'épaisseur e fixé il existe un pas de maillage h_o en dessous duquel il ne faut pas descendre. Si on se donne un pas de maillage $h \leq h_o$ on ne gagne presque rien en précision par rapport à l'accroissement important du temps de calcul. Il y donc un compromis à faire entre la précision et le temps de calcul. Par ailleurs, le Tableau (TAB. 2.1) montre que les valeurs obtenues par les éléments finis non conformes du type D.K.T (Discret Kirchhof Triangle) donnent de bons résultats pour $e=0.8$.

2.4 Simulation numérique dans les cas d'une solution analytique

Dans cette partie nous attaquons le problème sous un angle différent. Connaissant le champ de déplacements, il suffit de les injecter dans les équations et d'en déduire le champ de forces correspondant. C'est cette approche que nous considérons dans cette section. Nous allons donc construire un champ de déplacements satisfaisant aux conditions aux limites du problème membranaire puis nous allons grâce au logiciel MappelV trouver le champ de forces associé ce qui nous donnera un exemple concret de solution analytique pour notre problème. Au travers de ces exemples nous voulons, cela est possible pour le code Modulef, trouver une solution numérique satisfaisant à notre problème et voir l'influence des paramètres comme l'épaisseur ϵ et le pas du maillage h . En effet, théoriquement le paramètre ϵ vaut zéro puisqu'on traite le problème membranaire, cependant dans le code Modulef, il est impossible de donner brutalement cette valeur à l'épaisseur nous sommes donc amenés à faire tendre ce paramètre vers des grandeurs de l'ordre de $[10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, \dots]$. Par ailleurs, nous avons aussi regardé le cas où l'on maille le domaine de référence non plus avec des éléments structurés, mais à l'aide d'un mailleur automatique de type Delaunay-Voronoi [12].

2.4.1 Construction d'une solution analytique et du champ de forces correspondant

La construction d'un champ de solutions analytiques est fonction, d'une part, du domaine de référence, d'autre part, du choix de l'application paramétrisant la surface moyenne de la coque ainsi que des conditions aux limites imposées. C'est pourquoi dans un souci de simplification et de clarté nous considérons le domaine de référence suivant :

$$(2.6) \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leq 5\sqrt{2}\}$$

Pour les exemples envisagés, l'application paramétrisant la surface moyenne de la coque que nous allons considérer est la suivante :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \vec{\Psi} : \Omega &\longrightarrow S \subset \mathcal{E} \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, xy) \end{aligned}$$

Le problème limite auquel nous avons affaire est alors le suivant :

$$(2.8) \quad \begin{cases} \partial_1 T^{11} + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2)T^{11} + \Gamma_{22}^1 T^{22} = -f^1 + \partial_2 \frac{f^3}{2b_{12}} + \frac{3\Gamma_{12}^1}{2b_{12}} f^3, \\ \partial_2 T^{22} + (2\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1)T^{22} + \Gamma_{11}^2 T^{11} = -f^2 + \partial_1 \frac{f^3}{2b_{12}} + \frac{3\Gamma_{12}^2}{f}, \\ T^{11}n_1 = \frac{f^3}{2b_{12}}n_2, T^{22}n_2 = \frac{f^3}{2b_{12}}n_1 \text{ sur une partie } \Sigma_1 \text{ du bord } \Sigma. \end{cases}$$

De même, après élimination de la composant normale u_3 , on obtient, en ce qui concerne les composantes tangentielles du champ de déplacements le système différentiel suivant :

$$(2.9) \quad \begin{cases} \partial_1 u_1 - \Gamma_{11}^1 u_1 - \Gamma_{11}^2 u_2 = B_{11\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, \\ \partial_2 u_2 - \Gamma_{22}^1 u_1 - \Gamma_{22}^2 u_2 = B_{22\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, \\ (u_1, u_2) = (g^1, g^2) \text{ sur } \Sigma_2, \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2. \end{cases}$$

où les $\Gamma_{\beta\delta}^\alpha$ sont les coefficients de Christoffel et les $B_{\alpha\beta\delta\nu}$ sont les inverses des coefficients réduits $\hat{A}^{\alpha\beta\delta\nu} = (a^{\alpha\beta\delta\nu} - \frac{a^{\alpha\beta 12} a^{12\delta\nu}}{a^{1212}})$.

Un rapide calcul permet de constater que les coefficients de la seconde forme fondamentale sont :

$$(2.10) \quad b_{11} = 0, \quad b_{22} = 0, \quad b_{12} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Les seuls symboles de Christoffel non nuls sont :

$$(2.11) \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{y}{1+x^2+y^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{x}{1+x^2+y^2}.$$

si, de plus, on impose un champ de forces $\vec{f} = (f^1, f^2, f^3)$ dont la troisième composante est nulle nous constatons alors, que les systèmes différentiels (cf. équations 2.8 page 51, 2.9 page 51) précédents se simplifient et donnent comme nouveaux systèmes différentiels :

$$(2.12) \quad \begin{cases} \partial_1 T^{11} + \Gamma_{12}^2 T^{11} = -f^1, \\ \partial_2 T^{22} + \Gamma_{12}^1 T^{22} = -f^2. \end{cases}$$

Nous obtenons l'expression analytique de la troisième composante du champ de déplacements par la formule de reconstruction (1.41 page 16) :

$$(2.13) \quad u_3^0 = \frac{A^{1112}}{2b_{12}A^{1212}}\partial_x\phi(x, y) + \frac{A^{2212}}{2b_{12}A^{1212}}\partial_y\phi(x, y) - \frac{(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2)}{b_{12}}\phi(x, y) + \frac{1}{2b_{12}}(\partial_y\phi(x, y) + \partial_x\phi(x, y))$$

Il reste à préciser le choix des conditions aux limites. Nous traitons le cas des coques hyperboliques inhibées. Une façon certaine d'inhiber la coque est d'imposer la condition de fixation sur tout le bord de la coque. D'autres choix sont possibles comme par exemple imposer la condition de fixation sur les trois quarts de la frontière. Nous faisons le choix de fixation sur toute la frontière car les calculs sont plus simples à mener. Cela revient à imposer les conditions aux limites suivantes :

$$(2.14) \quad \begin{cases} u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

ceci est totalement licite puisqu'aucune des portions des frontières ne sont caractéristiques. En revanche, nous n'imposons aucune condition sur les composantes (T^{11}, T^{22}) , qui ne sont pas des conditions cinématiques. Cela n'est pas gênant pour la résolution sous forme variationnelle.

Nous allons à présent considérer une famille de fonctions $\phi_r(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à trace nulle satisfaisant ainsi aux conditions aux limites. La géométrie du domaine de référence suggère le choix suivant, certes ce choix n'est pas unique, mais celui-ci est commode et de surcroît trivial à calculer :

$$(2.15) \quad \phi_r(x, y) = ((x^2 - y^2)^2 - 2r^2(x^2 + y^2) + r^4)$$

Puisque r a été fixé à $5\sqrt{2}$ alors la fonction est :

$$(2.16) \quad \phi(x, y) = ((x^2 - y^2)^2 - 100(x^2 + y^2) + 2500)$$

On utilise alors la fonction définie par (2.16 page 52) pour construire explicitement les composantes tangentielles du champ de déplacements, la composante normale étant donnée par la formule (1.41 page 16) . On peut choisir pour champ de déplacements :

$$(2.17) \quad \begin{cases} u_1(x, y) = \phi(x, y) & \text{dans } \partial\Omega, \\ u_2(x, y) = \phi(x, y) & \text{dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

ou

$$(2.18) \quad \begin{cases} u_1(x, y) = \phi^2(x, y) & \text{dans } \partial\Omega, \\ u_2(x, y) = \phi(x, y) & \text{dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

ou encore

$$(2.19) \quad \begin{cases} u_1(x, y) = \phi^2(x, y) & \text{dans } \partial\Omega, \\ u_2(x, y) = \phi^2(x, y) & \text{dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

le choix (2.19 page 53) a l'avantage d'assurer aux composantes tangentielles du champ de déplacements d'être de classe $C_0^1(\Omega)$. Dans la suite nous faisons le choix (2.17 page 52) car il simplifie les calculs. Un rapide calcul avec MapleV permet de calculer les composantes tangentielles du champ de forces résultants.

La surface est alors soumise au champ de forces suivant pour le choix (2.17 page 52) :

$$(2.20) \quad \vec{f} = \begin{cases} f_1 = -[\partial_x(\hat{A}^{1111}\partial_x\phi + \hat{A}^{1122}\partial_y\phi) - \Gamma_{12}^2(\hat{A}^{1111}\partial_x\phi + \hat{A}^{1122}\partial_y\phi)] \\ f_2 = -[\partial_y(\hat{A}^{2211}\partial_x\phi + \hat{A}^{2222}\partial_y\phi) - \Gamma_{12}^1(\hat{A}^{2211}\partial_x\phi + \hat{A}^{2222}\partial_y\phi)] \\ f_3 = 0. \end{cases}$$

Avec ce choix le champ de déplacements $\vec{u}^o = (u_1^o, u_2^o, u_3^o)$ prend la forme suivante :

$$(2.21) \quad \vec{u}^o = \begin{cases} u_1^o = \phi(x, y), \\ u_2^o = \phi(x, y), \\ u_3^o = \frac{A^{1112}}{2b_{12}A^{1212}}\partial_x\phi(x, y) + \frac{A^{2212}}{2b_{12}A^{1212}}\partial_y\phi(x, y) - \\ \quad \frac{(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2)}{b_{12}}\phi(x, y) + \frac{1}{2b_{12}}(\partial_y\phi(x, y) + \partial_x\phi(x, y)). \end{cases}$$

Pour les tests numériques nous ne modifions pas les caractéristiques du matériau. Contrairement aux tests numériques précédents nous ne faisons varier que le paramètre ϵ et nous recherchons le meilleur pas de maillage correspondant. Pour ce faire, nous allons considérer deux sortes de maillage, l'un d'entre eux étant de type structuré et l'autre de type non structuré c'est-à-dire issu d'un mailleur automatique comme Delaunay-Voronoi [12]. Le premier maillage structuré est réalisé de telle sorte qu'il respecte totalement les courbes caractéristiques (qui sont les lignes asymptotiques) prises comme lignes coordonnées. Le second maillage, contrairement au précédent, ne

respecte pas les courbes caractéristiques. Nous avons représenté des coupes de la troisième composante du déplacement le long des segments noté [AB] et [CD] (cf. figures 2.16 page 55, 2.17 page 55, 2.18 page 56, 2.19 page 56), que nous avons comparé avec la solution analytique. Sur les figures (2.20 page 57, 2.21 page 57) nous avons représenté l'erreur relative pour chacune de courbes précédentes.

2.4.2 Analyse et discussion sur les courbes numériques

Il est clair que le nombre de nœuds doit être suffisant pour obtenir une approximation aussi fidèle que possible de la solution au fur et à mesure que le paramètre ϵ tend vers zéro. Mais un autre phénomène apparaît au travers de ces exemples analytiques. La façon de mailler le domaine joue un rôle fondamental. En effet, si l'on compare les figures 2.16 (cf. page 55) et 2.18 page 56 nous remarquons qu'à nombre de nœuds égal et à paramètre ϵ égal les courbes sont assez différentes alors que, si l'on compare les figures 2.17 (cf. page 55) et 2.19 (cf. page 56), nous ne remarquons pas de véritable variations. Les figures 2.20 (cf. page 57) et 2.21 (cf. page 57) montrent clairement que dans l'approximation à l'aide d'un maillage structuré l'erreur relative est beaucoup plus faible que dans le cas de maillage non structuré ce qui est visible sur les coupes le long des axes [AB] que sur les coupes [CD]. L'explication est simple. En effet l'axe [AB] est une caractéristique alors que l'axe [CD] ne l'est pas. Ainsi, dans l'approche numérique à l'aide de maillage structuré nous tenons compte des caractéristiques de la coque alors que dans un maillage non structuré ce n'est pas le cas. Nous avons à titre indicatif reporté en fin de ce chapitre les deux types de maillage utilisé (cf. figures 2.24 page 64 et 2.25 page 65).

2.5 Commentaire

Le choix de notre solution analytique peut paraître ambiguë dans la mesure où l'on part d'une solution analytique connue par avance, du moins en ce qui concerne le champ de déplacements tangentiel. Mais nous ne nous intéressons qu'à la seule composante normale, or celle-ci est bien calculée à partir d'un champ de forces \vec{f} dont on s'est imposé la troisième composante, il ne subsiste donc aucune ambiguïté. Cet exemple de solution analytique a l'intérêt de mettre en évidence que lors des simulations il peut y avoir des erreurs de calculs assez importantes en des points particuliers, notamment dans notre exemple au point A de coordonnées (0,0), là où la courbure change de signe dans les deux directions. Par ailleurs, il faut impérativement veiller à la nature du maillage. Celui-ci n'a pas besoin d'être structuré, mais alors (cf. figure 2.18 page 56) si le pas du maillage n'est pas suffisamment fin nous obtenons des résultats médiocres alors que ceux-ci s'améliorent dès que le maillage est raffiné. Par conséquent, il est préférable de prendre des maillages qui restent les plus fidèles possible au domaine et

respectant les courbes caractéristiques.

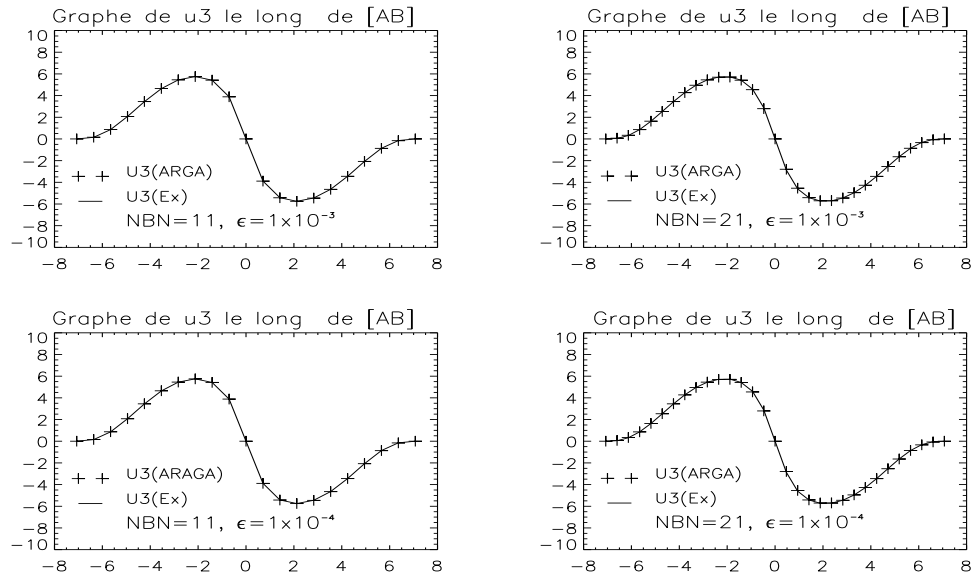


FIG. 2.16 – Comparaison des valeurs u_3 le long du segment [AB] en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ pour le maillage structuré

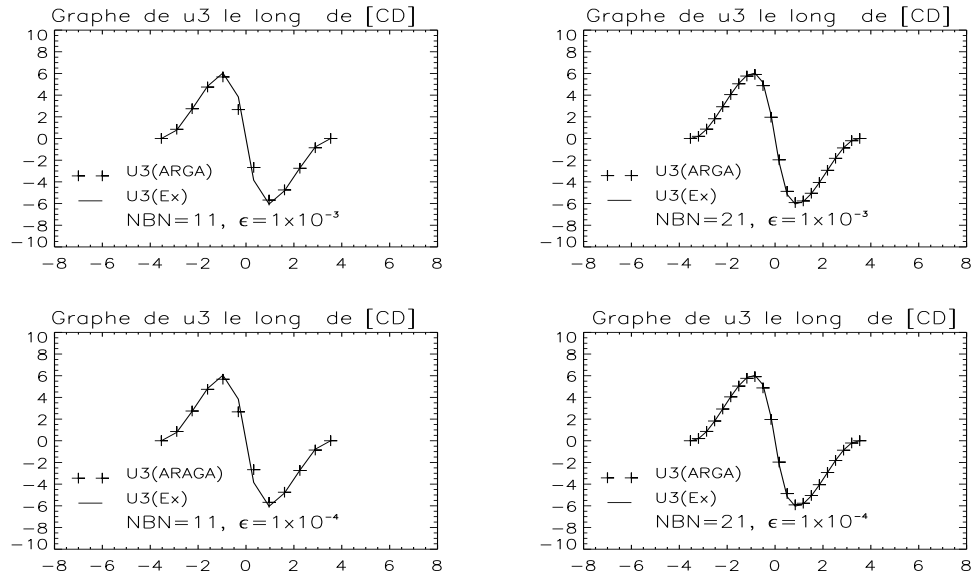


FIG. 2.17 – Comparaison des valeurs u_3 le long du segment [CD] en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ pour le maillage structuré

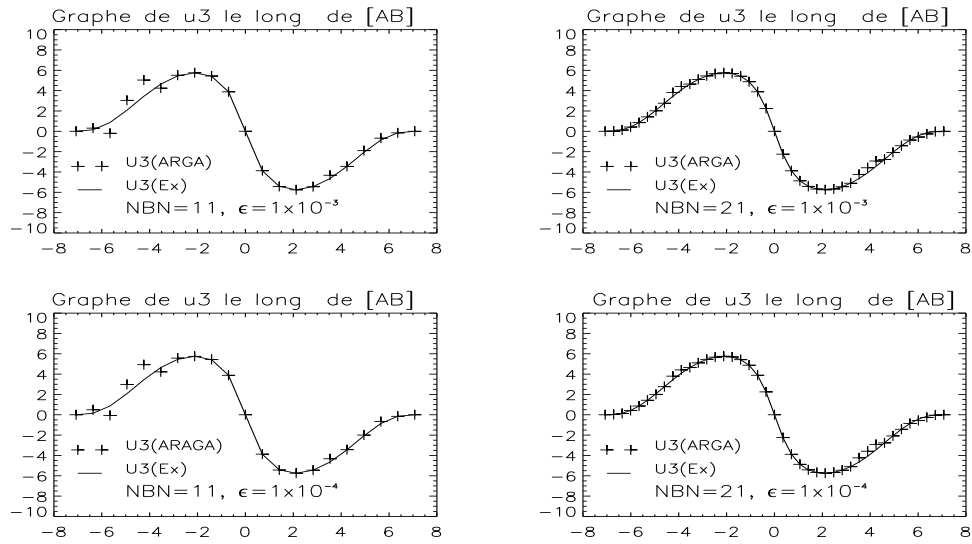


FIG. 2.18 – Comparaison des valeurs u_3 le long du segment $[AB]$ en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ pour le maillage non structuré de type Delaunay-Voronoi

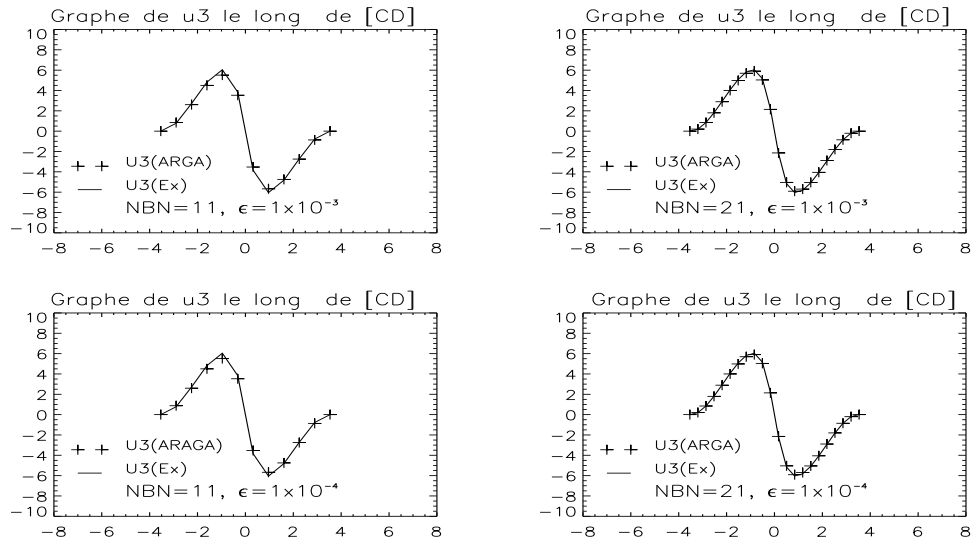


FIG. 2.19 – Comparaison des valeurs u_3 le long du segment $[CD]$ en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ pour le maillage non structuré de type Delaunay-Voronoi

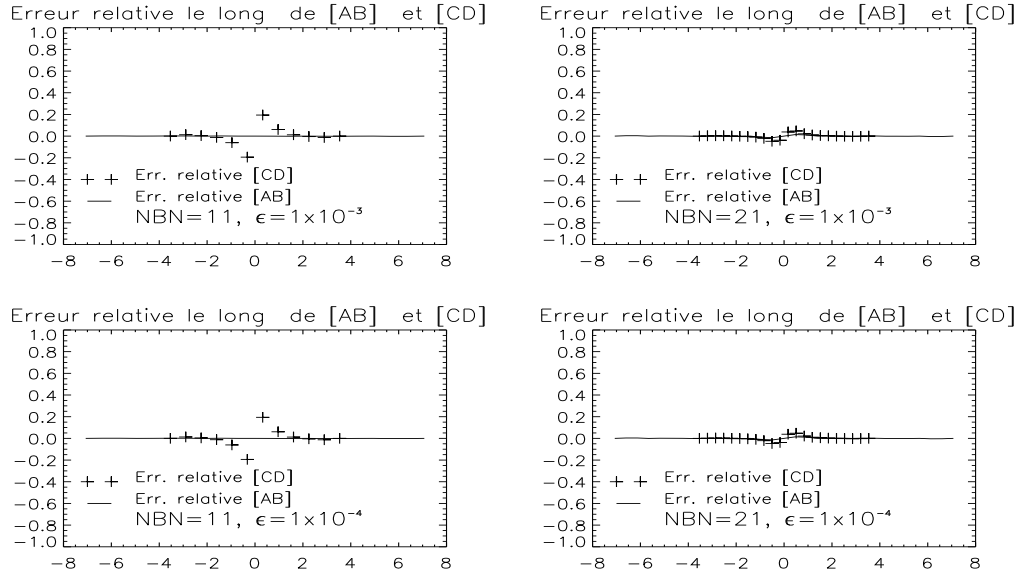


FIG. 2.20 – Comparaison des valeurs u_3 en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ pour le maillage structuré

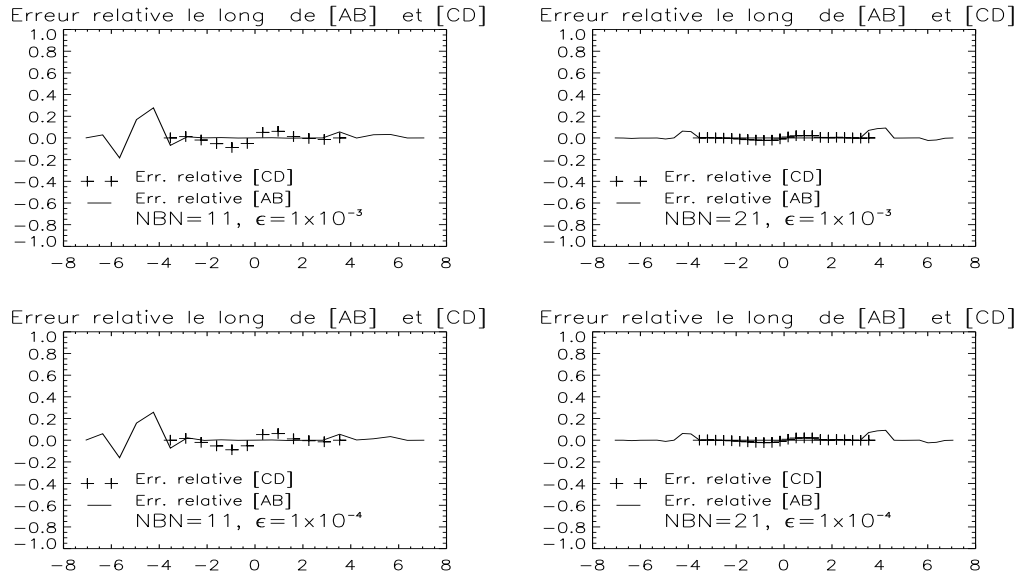


FIG. 2.21 – Comparaison des valeurs u_3 en fonction du nombre de nœuds et du paramètre ϵ pour le maillage non structuré de type Delaunay-Voronoi

2.6 Simulations numériques dans le cas où la composante normale est une distribution

Nous savons que la composante normale n'est pas en général, une fonction régulière et qu'elle peut être une distribution. Ceci veut dire qu'il existe des champs de forces pour lesquelles la composante normale est une distribution. Fort de ce résultat, nous aimerions savoir si avec le code *Modulef* nous pouvons néanmoins faire les calculs. Nous allons donc chercher à construire des champs de force \vec{f} de sorte que la composante normale soit une distribution.

On s'inspire du travail préalablement effectué dans la section précédente. En fait, il suffit de se donner une fonction ϕ qui au lieu d'être de classe $C^\infty(\Omega)$ et à trace nulle soit tout simplement de carré sommable, satisfaisant toujours aux conditions aux limites et dont la dérivée au sens des distributions existe. Le moyen le plus simple pour y parvenir est d'introduire une variante de la fonction de Heaviside, par exemple :

$$(2.22) \quad \begin{aligned} H : \mathbb{R} &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, en effectuant le produit de la fonction ϕ (cf. 2.15 page 52) par cette fonction $H(x)$, on construit un champ de déplacements tangentiel admissible. De plus, nous pouvons imposer à la troisième composante du champ de force d'être nulle. Par ailleurs, nous décidons d'imposer à la seconde composante du champ de déplacements tangentiel d'être nulle cela n'est pas restrictif. La solution analytique des composantes tangentielles et normale prennent alors la forme suivante :

$$(2.23) \quad \vec{u} = \begin{cases} \phi(x, y) = ((x^2 - y^2)^2 - 2r^2(x^2 + y^2) + r^4) \in C^\infty(\Omega) \\ u_1 = \phi(x, y) \cdot H(y) \in L^2(\Omega) \\ u_2 = 0 \in L^2(\Omega) \\ u_3 = \left[\frac{A^{1211}}{2b_{12}A^{1212}} \partial_x \phi - \frac{\Gamma_{12}^1}{b_{12}} \phi + \frac{1}{2b_{12}} \partial_y \phi \right] \cdot H(y) \\ \quad + \frac{[\phi(x)]}{2b_{12}} \delta_0(y) \in \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

Notons qu'il y a un moyen beaucoup plus simple pour réaliser des solutions analytiques qui soient dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, il suffit de jouer sur les conditions aux limites. Supposons donné un champ de forces identiquement nul, (d'autre choix de champ de forces

sont possibles mais celui-ci a l'avantage de simplifier les calculs), mais imposons des conditions de fixation autres que des conditions homogènes, alors on peut montrer que dans ce cas en choisissant correctement les conditions aux limites la composante normale du déplacement est un élément de l'espace des distributions.

2.6.1 Construction effective d'une solution dont la composante normale est une distribution

Dans cette partie nous considérons le parabolöide hyperbolique soumis à aucune force extérieure mais uniquement à des conditions aux limites particulières. Posons :

$$(2.24) \quad \begin{cases} \Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \phi_1(x) \text{ avec } y \leq 0\}, \\ \Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \phi_2(x) \text{ avec } y \geq 0\}, \\ \text{tel que } \partial\Omega_r = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{cases}$$

et imposons comme conditions aux limites

$$(2.25) \quad \begin{cases} \vec{u}_{\Gamma_1}^\epsilon = (-1, 0, 0) \\ \vec{u}_{\Gamma_2}^\epsilon = (1, 0, 0). \end{cases}$$

Un raisonnement simple à partir des caractéristiques permet de calculer, pour le système membranaire, le champ de déplacements normal solution du problème limite. La solution analytique prend alors la forme suivante :

$$(2.26) \quad \begin{cases} u_1^o = H(y) \text{ où } H(y) = 1 \text{ si } y > 0, \text{ et } H(y) = -1 \text{ si } y < 0, \\ u_2^o = 0, \\ u_3^o = -\frac{\Gamma_{12}^1}{b_{12}}H(y) + \frac{1}{2b_{12}}\delta_y \\ \text{où } \delta_y \text{ est la mesure de Dirac le long de l'axe } x=0. \end{cases}$$

Nous savons que lorsque le paramètre $\epsilon \searrow 0$ la solution u^ϵ du problème des coques tend vers la solution u^o du problème membranaire. Cet exemple nous permet d'apprécier le comportement des éléments finis d'Argyris-Ganev dans le cas où certaines données présentent des singularités. Les figures (2.22 page 60 et 2.23 page 61) illustre les solutions numériques pour la composante normale du problème des coques (éléments finis d'Argyris-Ganev) et du problème membranaire (éléments finis P_1).

On remarque que la solution obtenue par les éléments d'Argyris-Ganev présente des oscillations assez importantes lorsqu'on s'approche de la zone de discontinuité. Ceci est encore visible avec un maillage de type non structuré. Par ailleurs, l'utilisation d'un maillage qui ne respecte pas les courbes asymptotiques altère de manière significative la solution numérique. L'accroissement du nombre de degrés de liberté n'atténue en rien les oscillations.

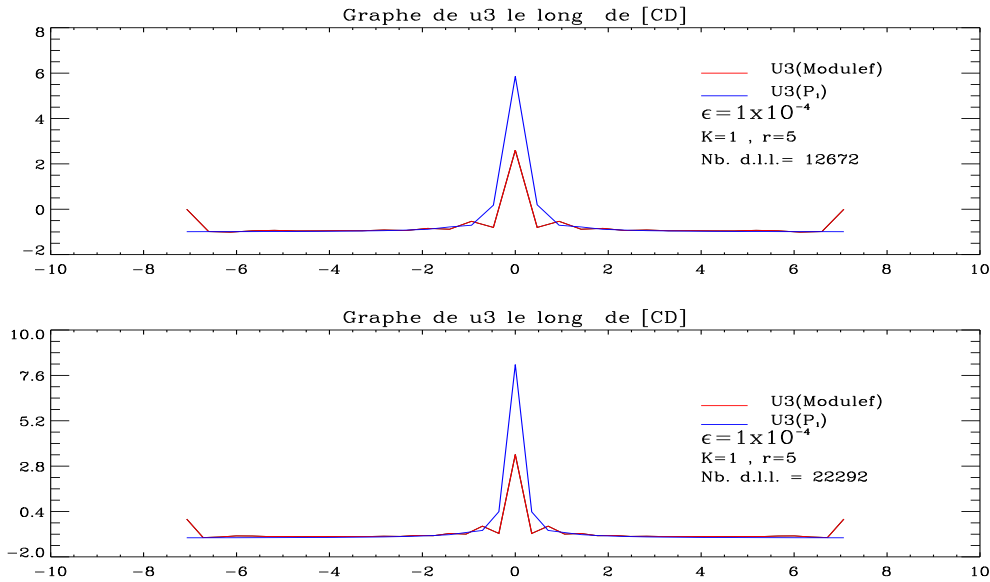


FIG. 2.22 – Comparaison entre les solutions analytique et numérique : cas d'un maillage de type structuré

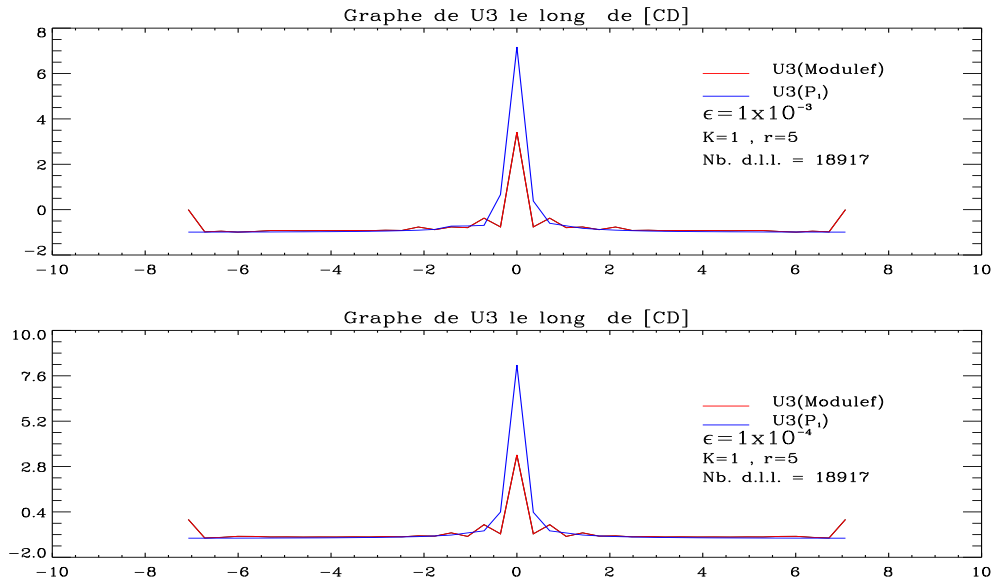


FIG. 2.23 – Comparaison entre les solutions analytique et numérique : cas d’un maillage non structuré de type Delaunay-Voronoi

2.6.2 Analyse et commentaires

La comparaison entre la solution exacte et la solution numérique calculée par les éléments finis d’Argyris-Ganev apporte quelques résultats intéressants. En premier lieu il est à noter que les solutions numériques présentent des oscillations. Cela peut sembler paradoxal dans la mesure où les éléments finis utilisés sont des éléments faisant intervenir des polynômes de haut degré de précisions. En ce qui concerne la composante normale u_3^0 du champ de déplacements le code évalue non seulement les valeurs aux nœuds mais aussi les dérivées premières et secondes. Nous remarquons par ailleurs que le fait d’accroître le nombre de nœuds n’améliore absolument pas la solution numérique (cf. figure 2.22 page 60). Dans la figure 2.23 (cf. page 61) nous avons utilisé un maillage non structuré mais nous observons les mêmes phénomènes bien que cette fois nous avons fait uniquement varier le paramètre ϵ pour un nombre de nœuds assez conséquent (d.l.l.=18917).

De cette étude, il ressort que *les éléments finis d’Argyris et Ganev ne sont pas adaptés pour traiter le problème des discontinuités des solutions*. Le choix du maillage reste très important. Enfin la plus grande difficulté est l’élimination des oscillations, ceci est tout à fait normal car il est vain d’espérer approcher des singularités à l’aide des éléments finis présentant des hauts degrés de précision. Il faut traiter le même problème avec des éléments finis de plus bas degrés.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les propriétés des éléments finis d'Argyris et Ganev. Les éléments finis d'Argyris et Ganev, bien que de très hauts degrés de précision ($d^{\circ 5}$, $d^{\circ 4}$) et assez robuste, présentent quelques faiblesses, en fait trop rigides, ils ne sont adaptés que pour des solutions régulières. L'étude des coques minces inhibées nécessite des maillages relativement fins et ceci d'autant plus que l'épaisseur de la coque est petite ($\varepsilon \searrow 0$). Par ailleurs, les différents tests numériques permettent d'affirmer l'existence d'une relation entre l'épaisseur, le pas de maillage et la courbure des coques. Il est à présent vérifié que pour toute épaisseur fixée il existe un pas de maillage optimal. Comme nous l'avons vu, l'obtention d'une solution numérique fiable et stable nécessite de trouver le bon pas de maillage \mathbf{h}_o . soit encore, trouver le nombre de degrés de liberté à partir duquel nous observons la convergence de la solution. En général, pour des épaisseurs petites de l'ordre de 10^{-4} , ..., 10^{-3} le nombre de degrés de liberté nécessaires devient conséquent or le grand nombre de degrés de liberté mis en jeu par les éléments finis d'Argyris et Ganev accroissent considérablement les tailles des matrices de rigidité et des seconds membres ce qui entraîne des temps de calculs parfois prohibitifs voir inacceptables.

Les différentes études menées dans le cadre de l'approximation des solutions numériques concernant des problèmes exacts des coques membranaires, lorsque les champs de forces appartiennent à l'espace $\hat{V}^{o'}$ (cf. section 2.4 page 50), montrent que les éléments finis de d'Argyris et Ganev sont bien adaptés. En revanche, les solutions deviennent beaucoup plus difficiles et délicates à calculer dans le cas où les champs de forces ne sont plus dans $\hat{V}^{o'}$. Ceci s'explique par deux raisons. D'une part, on résout un problème de perturbation singulière et d'autre part, pour que le problème limite existe (cf. problème membranaire section 1.3 page 12) il faut que les champs de forces satisfassent au critère d'isomorphisme des espaces \hat{V}^o dans $\hat{V}^{o'}$.

Enfin, leurs principales faiblesses résident dans l'approximation des solutions présentant des discontinuités. En effet, le simple fait que les éléments finis de Ganev et Argyris soient de degré très élevé enlève tout espoir de calculer des solutions fiables pour des coques de très faible épaisseur présentant des discontinuités par exemple des coques avec plis ou arêtes. Ceci est fort gênant comme nous le verrons dans le chapitre IV consacré au phénomène de propagation et de réflexion des singularités.

Par ailleurs, il est important d'insister sur le type du maillage qu'il faut utiliser. Comme nous l'avons vu dans ce chapitre II (voir section : 2.4) la nature structuré ou non structuré du maillage altère les solutions approchées surtout lorsqu'on fait des coupes le long des caractéristiques. Dans le traitement des coques minces hyperboliques inhibées il faut mailler le domaine de référence de sorte que les lignes asymptotiques soient correctement prises en compte. Ceci limite le choix du type de mailleur que l'on peut utiliser. En effet, l'usage de mailleurs automatiques tel que la méthode de Delaunay-Voronoi est à proscrire. Il faut impérativement utiliser des mailleurs de type

structuré. Le défaut majeur réside alors dans le maillage de pièces complexes présentant des frontières courbes, car le travail doit alors être réalisé manuellement.

Il ressort que pour traiter les coques dans leur intégralité les éléments finis de Ganev et Argyris ne sont pas bien adaptés. En effet, tant que les solutions sont régulières les éléments finis de Ganev et Argyris sont bons mais dans les zones de discontinuités ils ne sont pas bien adaptés. Il faut dissocier les zones régulières des zones non régulières et adapter les éléments finis pour chacune de ces zones.

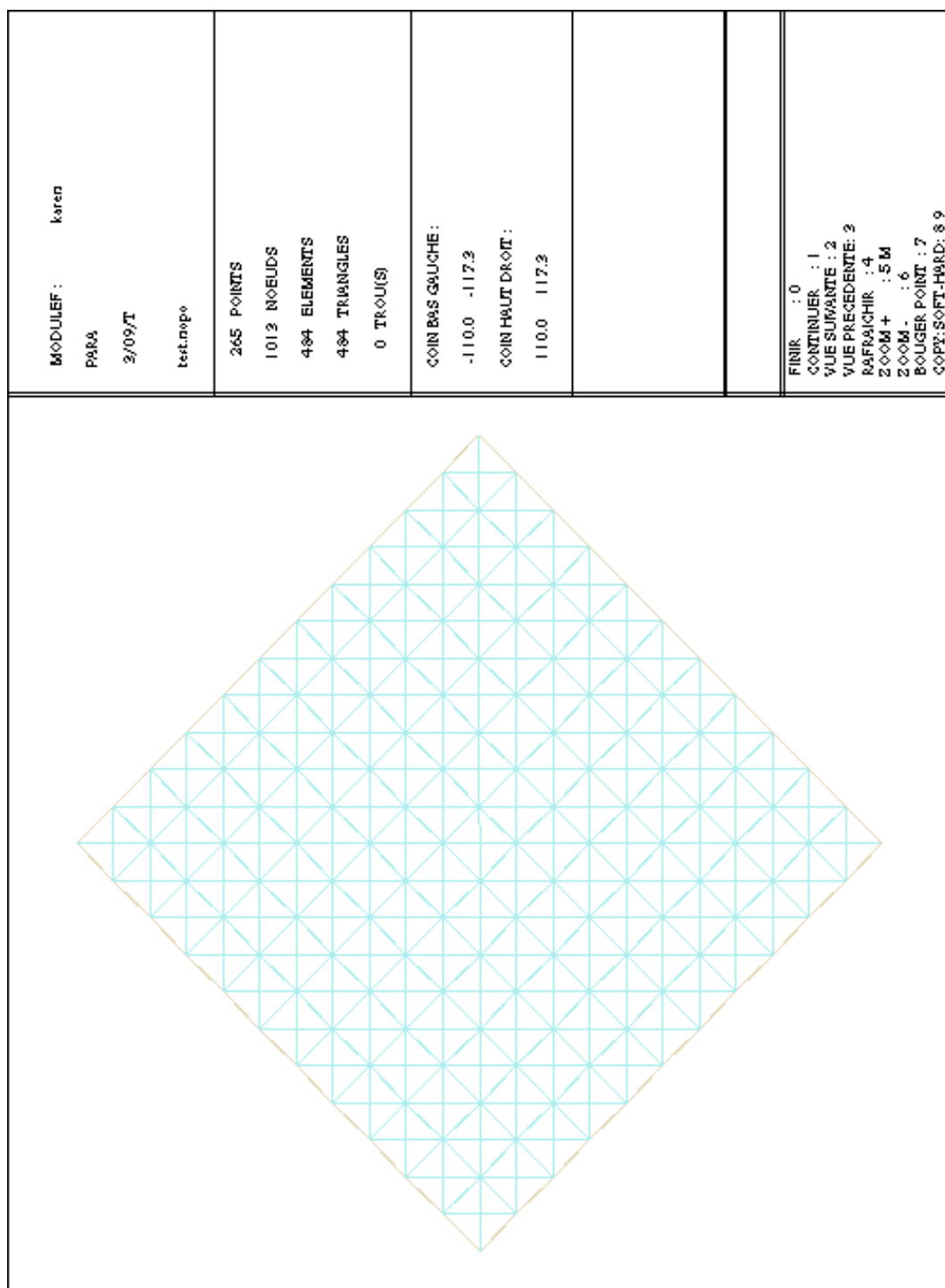


FIG. 2.24 – Exemple de maillage structuré

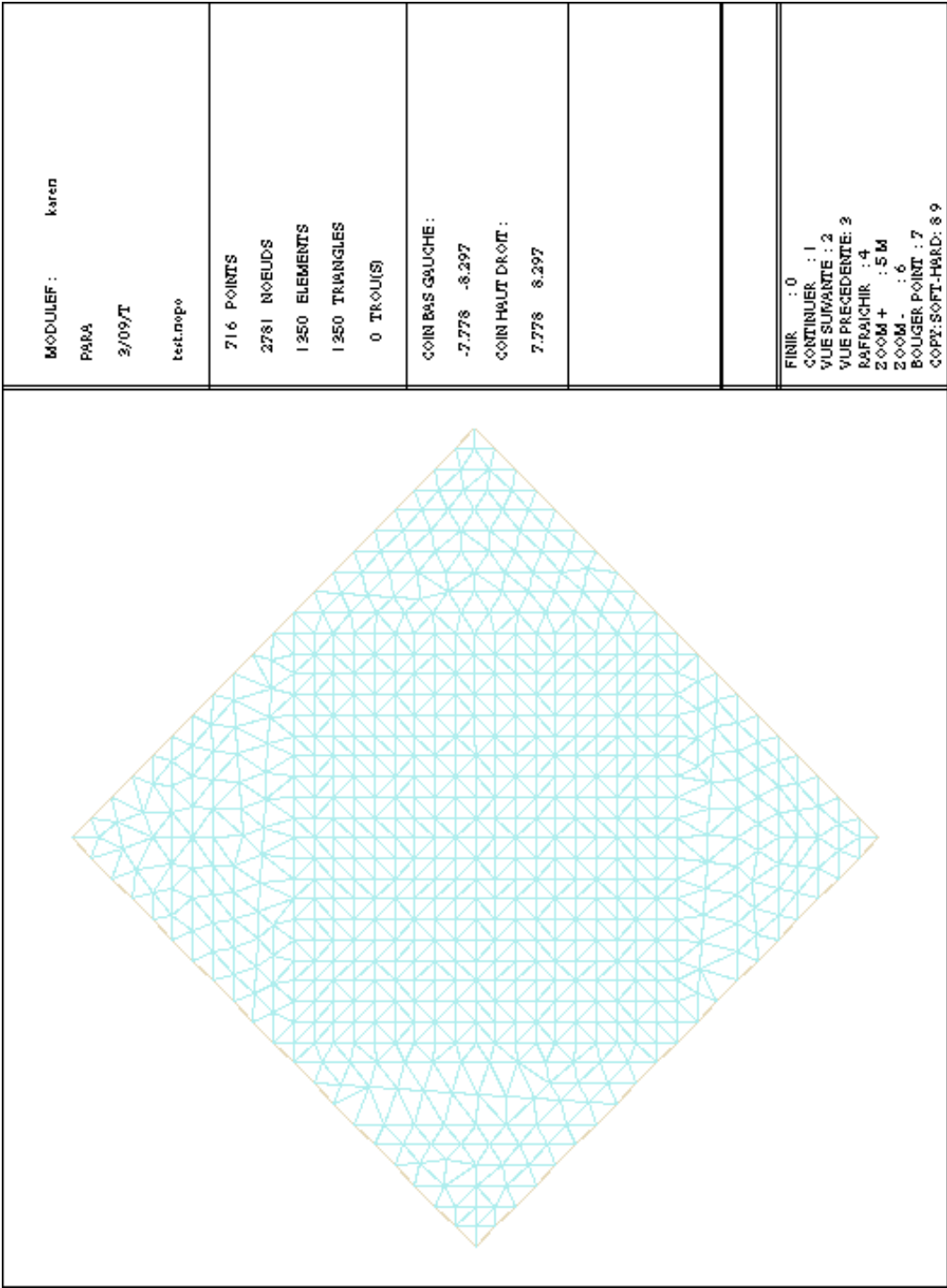


FIG. 2.25 – Exemple de maillage non structuré de type Delaunay-Voronoi

Chapitre 3

Approximation par éléments finis du problème limite réduit

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'approximation membranaire des coques minces de nature hyperbolique, par des éléments finis de type Lagrange. On considère le plan euclidien \mathbb{R}^2 muni du repère orthonormal $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et l'espace euclidien muni du repère orthonormal direct $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On se donne une surface moyenne \mathcal{S} , image d'un ouvert borné par une application $\vec{\Phi}$ c'est-à-dire que $\mathcal{S} = \vec{\Phi}(\bar{\Omega})$. On fait l'hypothèse non restrictive suivante : l'application $\vec{\Phi}$ est au moins de classe $C^2(\bar{\Omega})$ de telle sorte que tous les points de la surface sont réguliers de plus, on suppose que l'on a :

$$(3.1) \quad |\partial_1 \vec{\Phi} \wedge \partial_2 \vec{\Phi}|(x^1, x^2) \neq 0, \quad \forall (x^1, x^2) \in \bar{\Omega}$$

Considérons alors le problème suivant :

$$(3.2) \quad \begin{cases} -D_\alpha T^{\alpha\beta}(\vec{v}^0) = f^\beta \text{ p.p. dans } \Omega \\ -b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}(\vec{v}^0) = f^3 \text{ p.p. dans } \Omega. \end{cases}$$

complétés par des conditions aux limites qui peuvent être :

$$(3.3) \quad \mathbf{v}^0_{|\partial\Omega} = \vec{0} \text{ ou bien } \begin{cases} \mathbf{v}^0_{|\partial_o\Omega} = \vec{0} \\ T^{\alpha\beta}(\mathbf{v}^0)n_{\beta|\partial\Omega/\partial_o\Omega} = 0. \\ \text{où } \partial_o\Omega \text{ est une partie du bord } \partial\Omega \end{cases}$$

En fait, nous nous attarderons sur l'étude de l'approximation du problème limite ré-

duit, c'est-à-dire le problème dans lequel ne figure plus de manière explicite la troisième composante du déplacement, mais dont le calcul est effectué par la formule dédiée. À toutes fins utiles rappelons la nature du problème limite réduit sous forme faible :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \hat{v}^o \in \hat{V}^o \text{ tel que} \\ \hat{a}_o(\hat{v}^o, \hat{w}) = \langle \vec{f}, \hat{w} \rangle_{V',V} \end{cases}$$

où nous avons posé

$$(3.5) \quad \begin{cases} \hat{a}_o(\hat{v}^o, \hat{w}) = \int_{\Omega} \hat{A}^{\alpha\beta\lambda\nu} E_{\lambda\nu}(\hat{v}^o) E_{\alpha\beta}(\hat{w}) dS, \\ \langle \vec{f}, \hat{w} \rangle_{V',V} = \int_{\Omega} (f^\alpha w_\alpha + \frac{f^3 A^{12\lambda\nu}}{2b_{12} A^{1212}} E_{\lambda\nu}(\hat{w})) dS. \end{cases}$$

Par ailleurs, nous rappelons la formule de reconstruction de la troisième composante du déplacement pour le cas hyperbolique :

$$(3.6) \quad v_3^o = \frac{f^3 + 2b_{12} A^{12\lambda\nu} E_{\lambda\nu}(\hat{v}^o)}{4b_{12}^2 A^{1212}}$$

L'étude comprend deux aspects de l'approximation qui sont :

- i)** L'approximation par des éléments finis de type Lagrange pour les composantes tangentielles (u_1, u_2) .
- ii)** l'approximation de la troisième composante liée à l'utilisation de la formule de reconstruction.

L'objectif majeur de ce chapitre est de mettre en place un moyen de calcul aussi satisfaisant que possible des équations membranaires. L'étude porte sur le problème limite réduit dans le cas des coques minces hyperboliques inhibées. L'approche est celle de la méthode des éléments finis de bas et hauts degrés de précision de type Lagrange. Enfin, il s'agit d'établir des estimations sur les ordres de convergence de la méthode des éléments finis pour le problème réduit.

3.1 Problème limite réduit : mise sous forme matricielle

3.1.1 Écriture matricielle des formes bilinéaire et linéaire

Pour l'étude de la convergence de la méthode des éléments finis, il est intéressant d'utiliser la décomposition matricielle suivante de la forme bilinéaire et linéaire du problème limite réduit (cf. lemme 3.1.1 page 69 et lemme 3.1.2 page 70).

Lemme 3.1.1 *La forme bilinéaire $\hat{a}^0(.,.)$ peut se mettre sous la forme suivante :*

$$(3.7) \quad \hat{a}^0(\vec{u}^0, \vec{v}^0) = \int_S \langle V, \mathbb{A} \cdot U \rangle_{\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^6}$$

où U, V sont des vecteurs et \mathbb{A} est une matrice, le crochet $\langle ., . \rangle_{\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^6}$ de dualité est à prendre au sens du produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^6 i.e.

$$(3.8) \quad \langle V, \mathbb{A} \cdot U \rangle_{\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^6} = V^T \cdot \mathbb{A} \cdot U = \sum_{i,j=1}^6 V_j A_{ij} U_i$$

avec

$$(3.9) \quad V^T = [v_1 \ v_{1,1} \ v_{1,2} \ v_2 \ v_{2,1} \ v_{2,2}]$$

$$(3.10) \quad U^T = [u_1 \ u_{1,1} \ u_{1,2} \ u_2 \ u_{2,1} \ u_{2,2}]$$

$$(3.11) \quad \mathbb{A} = \sqrt{a} \Gamma^T \hat{\mathbb{A}} \Gamma$$

$$(3.12) \quad \hat{\mathbb{A}} = \begin{Bmatrix} \hat{A}^{1111} & \hat{A}^{1122} \\ \hat{A}^{2211} & \hat{A}^{2222} \end{Bmatrix}.$$

et où l'on a posé

$$(3.13) \quad \Gamma^T = \begin{Bmatrix} -\Gamma_{11}^1 & 1 & 0 & -\Gamma_{11}^2 & 0 & 0 \\ -\Gamma_{22}^1 & 0 & 0 & -\Gamma_{22}^2 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Si les lignes asymptotiques sont prises comme lignes coordonnées alors, les $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2$ seront tous nuls.

$$(3.14) \quad \hat{A}^{\alpha\beta\lambda\nu} = A^{\alpha\beta\lambda\nu} - \frac{A^{\alpha\beta 12} A^{12\lambda\nu}}{A^{1212}}$$

$$(3.15) \quad \sqrt{a} = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12}}$$

Lemme 3.1.2 *La forme linéaire $L_{\mathbb{F}}(\cdot)$ peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$(3.16) \quad L_{\mathbb{F}}(\vec{v}^0) = \int_S \langle V, \mathbb{F} \rangle_{\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^6}$$

où

$$(3.17) \quad \langle V, \mathbb{F} \rangle_{\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^6} = V^T \cdot \mathbb{F}$$

avec

$$(3.18) \quad V^T = [v_1 \ v_{1,1} \ v_{1,2} \ v_2 \ v_{2,1} \ v_{2,2}]$$

$$(3.19) \quad \mathbb{F}^T = \sqrt{a} \left[f^1 - \frac{f^3}{2b_{12}} \left(\frac{A^{1112}\Gamma_{11}^1 + A^{2212}\Gamma_{22}^1}{A^{1212}} + 2\Gamma_{12}^1 \right); \frac{A^{1112}f^3}{2b_{12}A^{1212}}; \frac{f^3}{2b_{12}}; \right. \\ \left. f^2 - \frac{f^3}{2b_{12}} \left(\frac{A^{1112}\Gamma_{11}^2 + A^{2212}\Gamma_{22}^2}{A^{1212}} + 2\Gamma_{12}^2 \right); \frac{f^3}{2b_{12}}; \frac{A^{2212}f^3}{2b_{12}A^{1212}} \right]$$

3.1.2 Calcul des coefficients réduits intervenant dans les décompositions matricielles

Remarque 3.1.1 *Nous constatons que pour tout couple d'indices $\alpha, \beta \in [1, 2]$ les coefficients $\hat{A}^{12\alpha\beta}$ sont nuls. En effet, nous avons :*

$$\hat{A}^{12\lambda\nu} = A^{12\lambda\nu} - \frac{A^{1212}A^{12\lambda\nu}}{A^{1212}} = 0$$

Nous savons par ailleurs (cf. chapitre 1 théorème 1.3.3 page 17) que ces coefficients jouissent des propriétés de symétrie et de positivité.

Dans cette sous section nous allons évaluer les différentes quantités qui interviennent dans la matrice \mathbb{A} ainsi que dans le vecteur \mathbb{F} . Nous partons de la formule suivante $A^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)}(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu})$ puisque le matériau est homogène et isotrope. Les termes utiles pour évaluer les coefficients réduits sont alors les suivants :

$$(3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^{1111} = \frac{E}{1-\nu^2}a^{11}a^{11}, \\ A^{1112} = \frac{E}{1-\nu^2}a^{11}a^{12}, \\ A^{2212} = \frac{E}{1-\nu^2}a^{22}a^{12}, \\ A^{2222} = \frac{E}{1-\nu^2}a^{22}a^{22}, \\ A^{1212} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}((1-\nu)a^{11}a^{22} + (1+\nu)a^{12}a^{12}), \\ A^{1122} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu a^{11}a^{22} + (1-\nu)a^{12}a^{12}). \end{array} \right.$$

Ainsi, les coefficients réduits ont pour expression analytique les quantités suivantes.

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}^{1111} = \frac{E}{1 + \nu} \frac{a^{11}a^{11}(a^{11}a^{22} - a^{12}a^{12})}{(1 - \nu)a^{11}a^{22} + (1 + \nu)a^{12}a^{12}}, \\ \hat{A}^{1122} = \frac{E}{1 + \nu} \frac{(\nu(a^{11}a^{22})^2 - (1 + 2\nu)a^{11}a^{22}a^{12}a^{12} + (1 + \nu)(a^{12}a^{12})^2)}{(1 - \nu)a^{11}a^{22} + (1 + \nu)a^{12}a^{12}}, \\ \hat{A}^{2222} = \frac{E}{1 + \nu} \frac{a^{22}a^{22}(a^{11}a^{22} - a^{12}a^{12})}{(1 - \nu)a^{11}a^{22} + (1 + \nu)a^{12}a^{12}}, \\ \hat{A}^{1211} = \hat{A}^{1212} = \hat{A}^{1222} = 0. \end{array} \right.$$

Remarque 3.1.2 Rappelons que les $a^{\alpha\beta}$ intervenant dans le calcul des coefficients sont donnés par la première forme fondamentale.

Dans ce qui suit, nous indiquons les expressions explicites des différentes fonctions apparaissant dans (3.6 page 68)-(3.21 page 71) en fonction de l'application $\vec{\Phi}$ et de ces dérivées partielles.

$$(3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}, \quad a_{\alpha\beta} = \vec{\Phi}_{,\alpha} \cdot \vec{\Phi}_{,\beta}, \\ a^{11} = \frac{a_{22}}{a}, \quad a^{12} = -\frac{a_{12}}{a}, \quad a^{22} = \frac{a_{11}}{a}, \\ b_{\alpha\beta} = \frac{\vec{\Phi}_1 \wedge \vec{\Phi}_2}{\sqrt{a}} \vec{\Phi}_{\alpha,\beta} \\ \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha = a^{\alpha\nu} \vec{\Phi}_{,\nu} \vec{\Phi}_{,\lambda\mu}. \end{array} \right.$$

Tenant compte de cette dernière remarque, les coefficients réduits s'écrivent aussi :

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}^{1111} = \frac{E}{1 + \nu} \frac{a^{11}a^{11}}{a((1 - \nu)a^{11}a^{22} + (1 + \nu)a^{12}a^{12})}, \\ \hat{A}^{1122} = \hat{A}^{2211} = \frac{E}{1 + \nu} \frac{\nu a^{11}a^{22} - (1 + \nu)a^{12}a^{12}}{a((1 - \nu)a^{11}a^{22} + (1 + \nu)a^{12}a^{12})}, \\ \hat{A}^{2222} = \frac{E}{1 + \nu} \frac{a^{22}a^{22}}{a((1 - \nu)a^{11}a^{22} + (1 + \nu)a^{12}a^{12})}. \end{array} \right.$$

Nous rappelons également les expressions analytiques des coefficients de Christoffel intervenant dans la matrice Γ .

$$(3.24) \quad \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \vec{a}^1 \vec{a}_{1,1} = (a^{11} \vec{a}_1 + a^{12} \vec{a}_2) \vec{a}_{1,1}, \\ \Gamma_{11}^2 = \vec{a}^2 \vec{a}_{1,1} = (a^{21} \vec{a}_1 + a^{22} \vec{a}_2) \vec{a}_{1,1}, \\ \Gamma_{22}^1 = \vec{a}^1 \vec{a}_{2,2} = (a^{11} \vec{a}_1 + a^{12} \vec{a}_2) \vec{a}_{2,2}, \\ \Gamma_{22}^2 = \vec{a}^2 \vec{a}_{2,2} = (a^{21} \vec{a}_1 + a^{22} \vec{a}_2) \vec{a}_{2,2}. \end{cases}$$

Le calcul effectif des différents coefficients intervenant dans le calcul des formes bilinéaire et linéaire nous amène alors à énoncer le lemme suivant :

Remarque 3.1.3 *Dans le cas où les lignes asymptotiques sont prises comme lignes de coordonnées alors, les $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2$ seront tous nuls.*

Lemme 3.1.3 *Toutes les expressions analytiques intervenant dans la forme bilinéaire ainsi que dans la forme linéaire s'expriment uniquement à l'aide de l'application $\vec{\Phi}$ comme fractions rationnelles de polynômes modulo la quantité \sqrt{a} . L'hypothèse $\vec{\Phi} \in C^2(\bar{\Omega})$ assure que tous les points de la surface sont réguliers et que tous les termes sont de classe $C^0(\bar{\Omega})$.*

La démonstration de ce lemme est triviale dans la mesure où l'on a déjà explicité la plupart des coefficients. On remarque que ceux-ci ne font intervenir que les coefficients de la première forme fondamentale qui, elle même, s'exprime grâce à l'application $\vec{\Phi}$.

3.2 Problème discret associé au problème limite réduit. Estimation de l'erreur

Dans cette section, nous considérons l'approximation de solutions de problèmes de coques membranaires hyperboliques. L'opérateur des coques membranaires hyperboliques est un système d'ordre deux par rapport aux deux inconnues (composantes tangentielles) et d'ordre zéro par rapport à la composante normale. Nous avons constaté que l'étude des coques membranaires hyperboliques se ramène à l'étude du problème réduit (cf. [35]) dans lequel ne figure plus explicitement la composante normale. Le problème réduit se comporte alors comme un problème d'élasticité sans rigidité au cisaillement. Cette constatation nous conduit à des simplifications dans le mode de traitement numérique par éléments finis du problème de coques membranaires hyperboliques. Dans cette partie nous allons montrer qu'il est possible d'obtenir à l'aide des éléments finis une approximation des champs de déplacements du problème de coques membranaires hyperboliques. Nous utilisons des théorèmes classiques de l'analyse mathématique sur les éléments finis (cf. [11, M. Bernadou, J. Planchard Ch.XII], [5, Ciarlet]) pour montrer que le problème approché admet une solution unique et nous établissons les conditions suffisantes pour les convergences. Nous avons utilisé

les théorèmes généraux concernant l'approximation par éléments finis d'un problème d'élasticité mais pour le problème limite réduit. En effet, le problème limite réduit est très proche du problème d'élasticité. Nous énonçons les théorèmes et donnons les démonstrations succinctement. Par ailleurs, nous tenons à souligner qu'il est possible d'établir tous ces résultats à partir des théorèmes généraux énoncés dans l'ouvrage de M. Bernadou (cf. [1, p.50-76])

Nous supposons par la suite que l'ouvert Ω est polygonal ce qui permet de le recouvrir exactement par une famille régulière de triangulation τ_h . Afin d'approcher la solution \hat{v}^0 du problème (3.4 page 68), nous devons construire un sous espace \hat{V}_h^o de dimension finie de \hat{V}^o .

À chaque triangulation τ_h , nous associons un produit d'espaces d'éléments finis $X_h = Y_h \times Y_h$. On définit une suite de sous espace $\hat{V}_h^o = V_h \times V_h$ de X_h qui prennent en compte les conditions aux limites apparaissant dans la définition de l'espace \hat{V}^o .

- Les fonctions de l'espace Y_h sont telles que, sur chaque triangle K de la triangulation τ_h , elles appartiennent à l'espace $P_K \subset H^1(K)$ (espace de dimension finie, généralement polynômial).
- Sur chaque triangle K de la triangulation τ_h , les fonctions sont déterminées par leurs valeurs sur les ensembles de degrés de liberté de K .
- $Y_h \subset C^0(\Omega)$

Nous posons alors :

$$(3.25) \quad V_h = \{v_h \in Y_h; v_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \text{ d'où } \hat{V}_h^o = V_h \times V_h$$

Le problème approché

La présence des coefficients variables rend généralement impossible le calcul exact des expressions $\hat{a}^o(\hat{u}_h, \hat{v}_h)$ et $L_h(\hat{v}_h)$ pour $(\hat{u}_h, \hat{v}_h) \in \hat{V}_h^o$. Il est donc nécessaire d'utiliser des schémas d'intégration numérique ce qui conduit à résoudre un nouveau problème approché. Le schéma d'intégration numérique sur le triangle K est déduit, par transformation affine, d'un schéma d'intégration numérique défini sur le triangle de référence \hat{K} .

Nous appelons triangle de référence \hat{K} , un triangle tel que pour chaque triangle K de la triangulation τ_h , il existe une application affine inversible, noté F_K , définie par :

$$(3.26) \quad \begin{aligned} F_K : \hat{K} &\longrightarrow K \\ \hat{x} &\longmapsto F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_k \end{aligned}$$

où B_K est une matrice inversible et b_k un vecteur de \mathbb{R}^2 tels que $F_K(\hat{a}_i) = a_i$ pour $i \in \{1..3\}$. Les points \hat{a}_i et a_i sont respectivement les sommets des triangles \hat{K} et K .

On considère alors un schéma d'intégration numérique sur le triangle de référence \hat{K} et on pose :

$$(3.27) \quad I(\hat{\phi}) = \int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) d\hat{x} \approx \sum_{i=1}^{i=N} \hat{\omega}_i \hat{\phi}(\hat{b}_i).$$

où $\hat{\omega}_i$ et \hat{b}_i désignent respectivement les poids et les nœuds du schéma d'intégration numérique. L'application affine (cf. 3.26 page 73) nous permet de définir le schéma d'intégration numérique sur le triangle K . On pose alors :

$$(3.28) \quad I(\phi) = \int_K \phi(x) dx \approx \sum_{i=1}^{i=N} \det(B_K) \hat{\omega}_i \phi(F_K(\hat{b}_i)).$$

Parallèlement, nous introduisons les deux fonctionnelles d'erreur définies respectivement sur le triangle courant et le triangle de référence :

$$(3.29) \quad E(\phi) = \int_K \phi(x) dx - \sum_{i=1}^{i=N} \det(B_K) \hat{\omega}_i (\phi \circ F_K)(\hat{b}_i).$$

$$(3.30) \quad \hat{E}(\phi) = \int_{\hat{K}} \phi(\hat{x}) d\hat{x} - \sum_{i=1}^{i=N} \hat{\omega}_i \phi(\hat{b}_i).$$

L'utilisation des schémas d'intégration numérique conduit à la définition des formes bilinéaire et linéaire approchées suivantes :

$$(3.31) \quad \hat{a}_h^o(\hat{u}_h, \hat{v}_h) = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{l=1}^N \sum_{i,j=1}^6 \det(B_K) \hat{\omega}_l (V_i A_{ij} U_j) \circ F_K(\hat{b}_l)$$

$$(3.32) \quad L_h(\hat{v}_h) = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^6 \det(B_K) \hat{\omega}_l (V_i F_i) \circ F_K(\hat{b}_l)$$

Nous introduisons alors le problème discret prenant en compte l'utilisation des techniques d'intégration numérique qui s'énonce :

$$(3.33) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \hat{u}_h \in \hat{V}_h^o \text{ tel que,} \\ \hat{a}_h^o(\hat{u}_h, \hat{v}_h) = L_h(\hat{v}_h), \forall \hat{v}_h \in \hat{V}_h^o \end{cases}$$

L'étude des estimations de l'erreur d'interpolation associée aux éléments finis nécessite quelques rappels concernant la théorie de l'interpolation dans les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$. On rappelle que pour tout entier m positif ou nul fixé et pour tout entier p satisfaisant $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :

$$(3.34) \quad W^{m,p}(\Omega) = \{v; v \in L^p(\Omega), \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

Muni de la norme :

$$(3.35) \quad \begin{cases} \|v\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p < \infty, \\ \|v\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq m} \{ \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha v| \}, \text{ si } p = \infty, \end{cases}$$

les espaces de $W^{m,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach. Nous utiliserons également les semi-normes suivantes :

$$(3.36) \quad \begin{cases} |v|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p < \infty, \\ |v|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha|=m} \{ \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha v| \}, \text{ si } p = \infty. \end{cases}$$

Nous énonçons à présent le théorème d'estimation abstraite de l'erreur. Ce théorème est classique et constitue un moyen efficace pour l'obtention d'une estimation d'erreur du type :

$$(3.37) \quad \|\hat{u} - \hat{u}_h\|_{\hat{V}^o} = O(h^m)$$

Théorème 3.2.1 *Considérons le problème discret (3.33 page 75) pour lequel la forme bilinéaire est \hat{V}_h^o -elliptique, c'est-à-dire il existe un réel $\alpha \geq 0$ indépendant de h telle que*

$$(3.38) \quad \alpha \|\hat{v}_h\|_{\hat{V}^o} \leq \hat{a}_h^o(\hat{v}_h, \hat{v}_h) \quad \forall \hat{v}_h \in \hat{V}_h^o$$

alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que.

$$(3.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\hat{u} - \hat{u}_h\|_{\hat{V}^o} \leq C \left\{ \inf_{\hat{v}_h \in \hat{V}_h^o} \{ \|\hat{u} - \hat{v}_h\| + \right. \\ \left. \sup_{\hat{w}_h \in \hat{V}_h^o} \frac{|\hat{a}^o(\hat{v}_h, \hat{w}_h) - \hat{a}_h^o(\hat{v}_h, \hat{w}_h)|}{\|\hat{w}_h\|} \right\} + \sup_{\hat{w}_h \in \hat{V}_h^o} \frac{|L(\hat{w}_h) - L_h(\hat{w}_h)|}{\|\hat{w}_h\|} \end{array} \right\}$$

Preuve :

L'hypothèse de \hat{V}_h^o -ellipticité entraîne l'existence et l'unicité d'une solution pour le problème discret (3.33 page 75). Supposons alors \hat{v}_h un élément quelconque de l'espace de V_h . Nous pouvons écrire :

$$(3.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \|\hat{u}_h - \hat{v}_h\|_{\hat{V}^o}^2 \leq \hat{a}_h^o(\hat{u}_h - \hat{v}_h, \hat{u}_h - \hat{v}_h) = \hat{a}^o(\hat{u} - \hat{v}_h, \hat{u}_h - \hat{v}_h) + \\ + [\hat{a}^o(\hat{v}_h, \hat{u}_h - \hat{v}_h) - \hat{a}_h^o(\hat{v}_h, \hat{u}_h - \hat{v}_h)] + [L_h(\hat{u}_h - \hat{v}_h) - L(\hat{u}_h - \hat{v}_h)] \end{array} \right\}$$

Posons $\hat{w}_h = \hat{u}_h - \hat{v}_h$, la continuité de la forme bilinéaire et en prenant le maximum par rapport à $\hat{w}_h \in \hat{V}_h^o$ entraîne alors que :

$$(3.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \|\hat{u}_h - \hat{v}_h\|_{\hat{V}^o} \leq M \|\hat{u} - \hat{v}_h\|_{\hat{V}^o} \\ + \sup_{\hat{v}_h \in \hat{V}_h^o} \frac{|\hat{a}^o(\hat{v}_h, \hat{w}_h) - \hat{a}_h^o(\hat{v}_h, \hat{w}_h)|}{\|\hat{w}_h\|} + \sup_{\hat{v}_h \in \hat{V}_h^o} \frac{|L(\hat{w}_h) - L_h(\hat{w}_h)|}{\|\hat{w}_h\|} \end{array} \right\}$$

L'inégalité triangulaire conduit à l'inégalité (3.39 page 76) en prenant le minimum par rapport à $\hat{v}_h \in \hat{V}_h^o$.

Théorème 3.2.2 *Soit (K, P_K, Σ_K) une famille affine régulière d'éléments finis ([11]). Tous les éléments finis (K, P_K, Σ_K) sont associés à l'élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ par l'application affine (3.26 page 73). Soit un entier $n_1 \geq 1$ tel que.*

$$\hat{P} = P_{n_1}(\hat{K})$$

On suppose que le schéma d'intégration numérique sur l'ensemble de référence \hat{K} vérifie les propriétés suivantes :

$$(3.42) \quad \forall \hat{\phi} \in P_{2n_1-2}, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0$$

Alors il existe une constante $C > 0$, indépendante de K et de h , telle que pour toute fonction $a \in W^{n_1, \infty}(K)$ et pour tout couple $\phi, \psi \in P_{n_1} \times P_{n_1}$ on a la majoration.

$$(3.43) \quad |E(a\partial_\alpha\psi\partial_\beta\phi)| \leq Ch_K^{n_1} \|a\|_{n_1,\infty,K} \|\partial_\alpha\psi\|_{n_1-1,2,K} \|\partial_\beta\phi\|_{0,2,K}$$

de plus, il existe une constante $C_1 > 0$, indépendante de K et de h , telle qu'on a la majoration.

$$(3.44) \quad |E(a\psi\phi)| \leq C_1 h_K^{n_1} \|a\|_{n_1,\infty,K} \|\psi\|_{n_1,2,K} \|\phi\|_{1,2,K}$$

Preuve : cf. [5, P.G. Ciarlet, Th. 4.1.4]

Le théorème de Sobolev sur les injections entraîne que $W^{n_1,\infty}(K) \subset \mathcal{C}^0(K)$ avec injection continue. Nous devons estimer $E(avw)$ pour $a \in W^{n_1,\infty}(K)$ et $v, w \in P_{n_1-1}$.

On part de la relation $E(avw) = \det(B_K) \hat{E}(\hat{a}\hat{v}\hat{w})$ avec $\hat{a} \in W^{n_1,\infty}(\hat{K})$ et $\hat{v} \in P_{n_1-1}, \hat{w} \in P_{n_1-1}$.

Fixons $\hat{w} \in P_{n_1-1}$ quelconque alors pour tout $\hat{b} \in W^{n_1,\infty}(\hat{K})$, nous avons :

$$(3.45) \quad |E(\hat{b}\hat{w})| \leq C |\hat{b}|_{0,\infty,\hat{K}} |\hat{w}|_{0,\infty,\hat{K}}$$

or $|\hat{b}|_{0,\infty,\hat{K}} \leq \|\hat{b}\|_{n_1,\infty,\hat{K}}$ et comme toutes les normes sont équivalentes sur l'espace de dimension finie P_{n_1-1} nous avons alors :

$$(3.46) \quad |E(\hat{b}\hat{w})| \leq C \|\hat{b}\|_{n_1,\infty,\hat{K}} |\hat{w}|_{0,2,\hat{K}}$$

Ainsi, pour tout $\hat{w} \in P_{n_1-1}$ donné, la forme linéaire

$$(3.47) \quad \hat{b} \in W^{n_1,\infty}(\hat{K}) \longrightarrow \hat{E}(\hat{b}\hat{w})$$

est continue de norme inférieure ou égale à $C|\hat{w}|_{0,2,\hat{K}}$ par ailleurs, elle s'annule sur l'espace P_{n_1-1} , alors d'après le lemme de Bramble-Hilbert, nous sommes assurés de l'existence d'une constante C telle que :

$$(3.48) \quad \forall \hat{b} \in W^{n_1,\infty}(\hat{K}), \forall \hat{w} \in P_{n_1-1} \quad |E(\hat{b}\hat{w})| \leq C \|\hat{b}\|_{n_1,\infty,\hat{K}} |\hat{w}|_{0,2,\hat{K}}$$

Posons alors $\hat{b} = \hat{a}\hat{v}$ avec $a \in W^{n_1,\infty}(\hat{K})$ et $\hat{v} \in P_{n_1-1}$, la formule de Leibnitz entraîne sachant que $|\hat{v}|_{n_1,\infty,\hat{K}} = 0$

$$(3.49) \quad |\hat{a}\hat{v}| \leq C \sum_{j=0}^{n_1-1} |\hat{a}|_{n_1-j,\infty,\hat{K}} |\hat{v}|_{j,\infty,\hat{K}}$$

Ce qui s'écrit encore

$$(3.50) \quad |\hat{a}\hat{v}| \leq C \sum_{j=0}^{n_1} |\hat{a}|_{n_1-j, \infty, \hat{K}} |\hat{v}|_{j, 2, \hat{K}}$$

en raison de l'équivalence des normes sur l'espace de dimension finie P_{n_1-1} . Ainsi :

$$(3.51) \quad \begin{cases} \forall \hat{b} \in W^{n_1, \infty}(\hat{K}), \forall \hat{v} \in P_{n_1-1}, \forall \hat{w} \in P_{n_1-1}, \\ |\hat{E}(\hat{a}\hat{v}\hat{w})| \leq C \left(\sum_{j=0}^{n_1-1} |\hat{a}|_{n_1-j, \infty, \hat{K}} |\hat{v}|_{j, 2, \hat{K}} \right) |\hat{w}|_{0, 2, \hat{K}} \end{cases}$$

De plus, nous avons les estimations suivantes :

$$(3.52) \quad \begin{cases} |\hat{a}|_{n_1-j, \infty, \hat{K}} \leq Ch_K^{n_1-j} |a|_{n_1-j, \infty, K}, j \in [0, \dots, n_1 - 1], \\ |\hat{v}|_{j, 2, \hat{K}} \leq Ch_K^j |\det(B_K)|^{-\frac{1}{2}} |v|_{j, 2, K}, j \in [0, \dots, n_1 - 1], \\ |\hat{w}|_{0, 2, \hat{K}} \leq C |\det(B_K)|^{-\frac{1}{2}} |w|_{0, 2, K}. \end{cases}$$

qui reportées dans la relation (3.51 page 78) donne :

$$(3.53) \quad E(aww) \leq Ch_K^{n_1} \|a\|_{n_1, \infty, K} \|v\|_{n_1-1, 2, K} |w|_{0, 2, K}$$

Pour démontrer l'inégalité (3.44) il suffit de constater que cette fois le couple (v,w) est dans $P_{n_1} \times P_{n_1}$ en conséquence $|\hat{v}|_{n_1, \infty, \hat{K}} \neq 0$ et l'on conclue en utilisant les estimations (3.52).

Théorème 3.2.3 *Soit (K, P_K, Σ_K) une famille affine régulière d'éléments finis. Tous les éléments finis (K, P_K, Σ_K) sont associés à l'élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ par l'application affine (3.26 page 73). Soit $n_1 \geq 1$ un entier tel que.*

$$\hat{P} = P_{n_1}(\hat{K})$$

On suppose que le schéma d'intégration numérique sur l'ensemble de référence \hat{K} vérifie les propriétés suivantes :

$$(3.54) \quad \forall \hat{\phi} \in P_{2n_1-2}, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0,$$

Alors il existe une constante $C > 0$, indépendante de K , telle que pour toute fonction $b \in W^{n_1, q}(K)$ avec $q > \frac{2}{n_1}$ pour tout $v \in P_{n_1}$ on ait la majoration.

$$(3.55) \quad |E(bv)| \leq Ch_K^{n_1} (\text{mes}(K))^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|b\|_{n_1, q, K} \|v\|_{1, 2, K}$$

La démonstration du théorème 3.2.3 figure dans [5, p.195-198].

Nous établissons à présent les conditions suffisantes pour obtenir la propriété de \hat{V}_h^o -ellipticité uniforme.

Théorème 3.2.4 *Considérons une famille régulière de triangulations τ_h du domaine Ω à laquelle est associée une famille affine d'éléments finis (K, P_K, Σ_K) , désignons par \hat{V}_h^o l'espace discret correspondant et supposons qu'il existe un entier $n_1 \geq 1$ tel que l'on ait :*

$$(3.56) \quad \hat{P} = P_{n_1}(\hat{K})$$

Supposons, de plus, que le schéma d'intégration numérique sur l'ensemble de référence \hat{K} vérifie les propriétés suivantes :

- les noeuds d'intégration appartiennent à \hat{K}
- $\forall \hat{\phi} \in P_{2n_1-2}, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0$

Alors, si les coefficients $A_{ij}, (i, j) \in [1, \dots, 6] \times [1, \dots, 6]$ sont dans $W^{1, \infty}(\Omega)$, il existe deux constantes $\alpha > 0$ et h_1 indépendantes de h telles que :

$$(3.57) \quad \alpha \|\hat{v}_h\|_{\hat{V}^o}^2 \leq \hat{a}_h^o(\hat{v}_h, \hat{v}_h), \forall \hat{v}_h \in \hat{V}_h^o, \forall h < h_1$$

où la forme bilinéaire est définie par la relation (3.31 page 74)

Preuve :

$\forall \hat{v}_h \in \hat{V}_h^o$, l'inclusion $\hat{V}_h^o \subset \hat{V}^o$ entraîne :

$$(3.58) \quad \hat{a}_h^o(\hat{v}_h, \hat{v}_h) = \hat{a}^o(\hat{v}_h, \hat{v}_h) + \hat{a}_h^o(\hat{v}_h, \hat{v}_h) - \hat{a}^o(\hat{v}_h, \hat{v}_h)$$

puisque la forme bilinéaire est \hat{V}^o -elliptique et que $\hat{V}_h^o \subset \hat{V}^o$ alors il existe une constante $\beta > 0$ indépendante de h telle que :

$$(3.59) \quad \beta \|\hat{v}_h\|_{\hat{V}^o} \leq \hat{a}^o(\hat{v}_h, \hat{v}_h), \forall \hat{v}_h \in \hat{V}^o$$

Les hypothèses du lemme 3.1.1 (cf. page 69) permettent d'exploiter le théorème 3.2.1 (cf. page 75). Il suffit d'appliquer le théorème 3.2.2 (cf. page 76) aux différents termes apparaissant au second membre de la relation suivante :

Remarque 3.2.1 *On étend (3.43) et (3.44) aux termes $E(a(\partial_\alpha\psi)\phi)$ et $E(a\psi(\partial_\beta\phi))$*

$$(3.60) \quad \hat{a}_h^\circ(\hat{v}_h, \hat{v}_h) - \hat{a}^\circ(\hat{v}_h, \hat{v}_h) = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{1 < i, j < 6} E(A_{ij} U_i V_j)$$

Ainsi, on exhibe une constante C , indépendante de h , telle que

$$(3.61) \quad |\hat{a}_h^\circ(\hat{v}_h, \hat{v}_h) - \hat{a}^\circ(\hat{v}_h, \hat{v}_h)| \leq Ch \|\hat{v}_h\|_{\hat{V}^\circ}.$$

Il suffit de combiner les inégalités (3.57 page 79), (3.58 page 79), (3.59 page 79) ce qui donne :

$$(3.62) \quad \hat{a}_h^\circ(\hat{v}_h^0, \hat{v}_h^0) \geq (\beta - Ch) \|\hat{v}_h^0\|_{\hat{V}^\circ}^2 \forall \hat{v}_h^0 \in \hat{V}_h^0$$

Si on prend $\alpha = \frac{\beta}{2}$ et $h_1 = \frac{\beta}{2C}$ nous avons l'inégalité (3.57 page 79).

Nous sommes à présent en mesure d'évaluer les différents termes de l'inégalité (3.39 page 76) et ainsi d'obtenir une estimation asymptotique de l'erreur $\|\hat{u} - \hat{u}_h\|_{\hat{V}^\circ}$ entre la solution du problème limite continu (3.5 page 68) et la solution du problème limite approché (3.33 page 75), ce qui conduit au résultat suivant :

Théorème 3.2.5 *Supposons donnés les espaces d'éléments finis Y_h (3.2 page 72) et supposons qu'il existe un entier $n_1 \geq 1$ que tel que :*

$$(3.63) \quad \hat{P} = P_{n_1}(\hat{K})$$

$$(3.64) \quad H^{n_1+1} \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\hat{K})$$

Soit V_h l'espace de dimension finie défini par la relation (3.25 page 73); on a $\hat{V}_h^o \subset \hat{V}^o$.

Si le schéma d'intégration numérique sur l'ensemble de référence \hat{K} vérifie les propriétés suivantes :

$$(3.65) \quad \forall \hat{\phi} \in P_{2n_1-2}, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0,$$

alors, si la solution $\hat{u}^o \in \hat{V}^o$ du problème variationnel (3.4 page 68) appartient à l'espace $(H^{n_1+1}(\Omega) \times H^{n_1+1}(\Omega))$, si les coefficients de la matrice $\mathbb{A} \in W^{n_1, \infty}(\Omega)$ et si les composantes du champ de force sont dans $W^{n_1, q}(\Omega)$ avec $n_1 > \frac{2}{q}$ et $q \geq 2$, il existe

deux constantes C et $h_1 > 0$ indépendantes de h telles que $\forall h < h_1$ on ait l'estimation suivante :

$$(3.66) \quad \|\hat{u}^o - \hat{u}_h^o\| \leq Ch^{n_1} (\|\hat{u}^o\|_{n_1+1,2,\Omega} + \|\vec{f}\|_{n_1,q,\Omega})$$

où \hat{u}_h est une solution du problème approché (3.33 page 75).

Preuve :

Les hypothèses du théorème nous permettent d'exploiter successivement les théorèmes précédents (3.1.2 page 70) et (3.2.1 page 75). En effet, la condition de \hat{V}_h^0 -ellipticité est vérifiée, il nous reste à évaluer les quantités suivantes :

$$(3.67) \quad \|\hat{u} - \pi_h \hat{u}\| ; \sup_{\vec{w}_h \in \hat{V}_h^0} \frac{|\hat{a}^o(\pi_h \hat{u}, \vec{w}_h) - \hat{a}_h^o(\pi_h \hat{u}, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|} ; \sup_{\vec{w}_h \in \hat{V}_h^0} \frac{|L(\vec{w}_h) - L_h(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|}$$

Estimation de $\|\hat{u} - \pi_h \hat{u}\|$

Pour estimer la quantité $\|\hat{u} - \pi_h \hat{u}\|$, on utilise un théorème classique sur l'approximation par éléments finis ce qui nous donne :

$$(3.68) \quad \|\hat{u} - \pi_h \hat{u}\| \leq Ch^{n_1} |\hat{u}|_{n_1+1,2,\Omega}$$

où C est une constante indépendante de h .

Estimation de $\sup_{\vec{w}_h \in \hat{V}_h^0} \frac{|\hat{a}^o(\pi_h \hat{u}, \vec{w}_h) - \hat{a}_h^o(\pi_h \hat{u}, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|}$

Les relations suivantes :

$$(3.69) \quad \begin{cases} \hat{a}^o(\hat{u}, \hat{v}) = \int_{\Omega} \langle U, \mathbb{A}V \rangle dx \\ \hat{a}_h^o(\hat{u}_h, \hat{v}_h) = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{l=1}^{l=N} \omega_l \langle U_h(b_l), \mathbb{A}(b_l)V_h(b_l) \rangle \\ E(\phi) = \int \phi(x) dx - \sum_{l=1}^N \omega_l \phi(b_l) \end{cases}$$

entraînent que :

$$(3.70) \quad |\hat{a}^o(\pi_h \hat{u}, \hat{v}_h) - \hat{a}_h^o(\pi_h \hat{u}, \hat{v}_h)| \leq \sum_{K \in \tau_h} \sum_{i,j=1}^6 |\hat{E}((\pi_h U)_i, A_{ij}(W_h)_j)|$$

où on a posé

$$(3.71) \quad \begin{cases} (\pi_h U) = [\pi_h u_1, \pi_h u_{1,1}, \pi_h u_{1,2}, \pi_h u_2, \pi_h u_{2,1}, \pi_h u_{2,2}] \\ (W_h) = [w_{h1}, w_{h1,1}, w_{h1,2}, w_{h2}, w_{h2,1}, w_{h2,2}]. \end{cases}$$

En exploitant le théorème 3.2.2 (cf. page 76) pour les différents termes qui apparaissent dans $\hat{E}((\pi_h U)_i, A_{ij}(W_h)_j)$ on trouve :

$$(3.72) \quad \sum_{i,j=1}^6 |\hat{E}((\pi_h U)_i, A_{ij}(W_h)_j)| \leq C h_k^{n_1} \|A\|_{n_1,2,K} \times \left(\sum_{\alpha=1}^2 \|\pi_h u_\alpha\|_{n_1,2,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|W_h\|_{\hat{V}^o}$$

d'autre part nous avons :

$$(3.73) \quad \left(\sum_{\alpha=1}^2 \|\pi_h u_\alpha\|_{n_1,2,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|\hat{u}\|_{n_1+1,2,\Omega}, \text{ pour } \alpha \in [1..2]$$

Par hypothèse $h = \max_{K \in \tau_h} h_K$, donc en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on trouve que :

$$(3.74) \quad \sup_{\vec{w}_h \in \hat{V}_h^o} \frac{|\hat{a}^o(\pi_h \hat{u}, \vec{w}_h) - \hat{a}_h^o(\pi_h \hat{u}, \vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|} \leq C h^{n_1} \|A\|_{n_1,\infty,\Omega} \|\hat{u}\|_{n_1+1,2,\Omega}$$

Estimation de $\sup_{\vec{w}_h \in \hat{V}_h^o} \frac{|L(\vec{w}_h) - L_h(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|}$

La forme linéaire L fait apparaître deux sortes de termes. Le premier terme ne fait intervenir que les composantes tangentielles des forces extérieures (i.e. $\vec{f} = (f^1, f^2)$) alors que le deuxième terme tient compte de la troisième composante des forces (i.e.

f^3) ainsi que des quantités $\frac{f^3 A^{\alpha\beta\nu\mu} b_{\nu\mu}}{b_{\sigma\pi} A^{\sigma\pi\epsilon\delta} b_{\epsilon\delta}} E_{\alpha\beta}$.

Il en résulte que pour trouver une estimation du terme $\sup_{\vec{w}_h \in \hat{V}_h^0} \frac{|L(\vec{w}_h) - L_h(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|}$ on doit le décomposer en deux parties, et utiliser les théorèmes précédents.

Les relations suivantes :

$$(3.75) \quad L(\hat{v}) = \int_{\Omega} (f^\alpha w_\alpha + \frac{f^3 A^{\alpha\beta\nu\mu} b_{\nu\mu}}{b_{\sigma\pi} A^{\sigma\pi\epsilon\delta} b_{\epsilon\delta}} E_{\alpha\beta}) dx$$

$$(3.76) \quad L_h(\hat{v}) = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{l=1}^N \omega_l (f^\alpha w_\alpha(b_l) + \frac{f^3 A^{\alpha\beta\nu\mu} b_{\nu\mu}}{b_{\sigma\pi} A^{\sigma\pi\epsilon\delta} b_{\epsilon\delta}} E_{\alpha\beta}(w_\alpha(b_l)))$$

$$(3.77) \quad E(\phi) = \int_K \phi(x) dx - \sum_{i=1}^{i=N} \det(B_K) \hat{\omega}_i(\phi \circ F_K)(\hat{b}_i).$$

entraînent que :

$$(3.78) \quad |L(\vec{w}_h) - L_h(\vec{w}_h)| \leq \sum_{K \in \tau_h} |E(f^\alpha w_{h\alpha})| + \sum_{K \in \tau_h} |E(\frac{f^3 A^{\alpha\beta\nu\mu} b_{\nu\mu}}{b_{\sigma\pi} A^{\sigma\pi\epsilon\delta} b_{\epsilon\delta}} E_{\alpha\beta}(w_h))|$$

En appliquant le théorème (3.2.3 page 78) aux termes $|E(f^\alpha v_{h\alpha})|$ pour $\alpha \in [1..2]$, on obtient :

$$(3.79) \quad |E(f^\alpha v_{h\alpha})| \leq Ch_K^{n_1} \|\vec{f}\|_{n_1, q, \Omega} \|\vec{w}_h\|_{\hat{V}^0}$$

Le terme $|E(\frac{f^3 A^{\alpha\beta\nu\mu} b_{\nu\mu}}{b_{\sigma\pi} A^{\sigma\pi\epsilon\delta} b_{\epsilon\delta}} E_{\alpha\beta}(w_h))|$ pour $\alpha, \beta \in [1..2] \times [1..2]$ donne :

$$(3.80) \quad |E(\frac{A^{\alpha\beta\nu\mu} b_{\nu\mu}}{b_{\sigma\pi} A^{\sigma\pi\epsilon\delta} b_{\epsilon\delta}} E_{\alpha\beta}(w_h))| \leq Ch_K^{n_1} \|f^3\| \|\tilde{A}^{\alpha\beta}\|_{n_1, \infty, \Omega} \|\vec{w}_h\|_{\hat{V}^0}$$

où $\tilde{A}^{\alpha\beta} = \frac{A^{\alpha\beta\nu\mu} b_{\nu\mu}}{b_{\sigma\pi} A^{\sigma\pi\epsilon\delta} b_{\epsilon\delta}}$

Par suite l'hypothèse $h = \max_{K \in \tau_h} h_k$ donne :

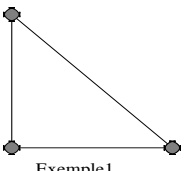
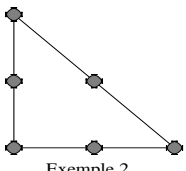
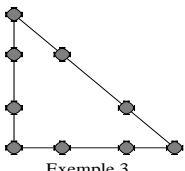
$$(3.81) \quad |L(\vec{w}_h) - L_h(\vec{w}_h)| \leq Ch^{n_1} \|\vec{f}\|_{n_1, q, \Omega} \|\vec{w}_h\|_{\hat{V}^0}$$

d'où

$$(3.82) \quad \left\{ \sup_{\vec{w}_h \in \hat{V}_h^0} \frac{|L(\vec{w}_h) - L_h(\vec{w}_h)|}{\|\vec{w}_h\|} \leq Ch^{n_1} \|\vec{f}\|_{n_1, q, \Omega} \right.$$

Nous sommes dans les conditions d'application du théorème 3.2.5 (cf. page 80). On déduit l'estimation en combinant les différentes inégalités.

Le tableau (TAB. 3.1) résume le théorème 3.2.5 (cf. page 80) pour l'utilisation des éléments finis P_1 , P_2 , P_3 de Lagrange. Il précise les schémas d'intégration numériques qu'il faut utiliser pour avoir les convergences souhaitées ainsi que les régularités de la solution pour les composantes tangentielles et des coefficients réduits.

Elements finis utilises pour construire l'espace X_h	 Exemple 1	 Exemple 2	 Exemple 3
	Lagrange type (1) $n_1 = 1$	Lagrange type (2) $n_1 = 2$	Lagrange type (3') $n_1 = 3$
$\ \hat{u} - \hat{u}_h\ $	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^3)$
Critère sur le schéma d'in- tégration nu- mérique	$\forall \phi \in P_0 \hat{E}(\phi) = 0,$ schéma à 1 noeud	$\forall \phi \in P_2 \hat{E}(\phi) = 0,$ schéma à 3 noeuds	$\forall \phi \in P_4 \hat{E}(\phi) = 0,$ schéma à 6 noeuds
régularité de \hat{u}	$\hat{u} \in H^2(\Omega)$	$\hat{u} \in H^3(\Omega)$	$\hat{u} \in H^4(\Omega)$
régularité des coefficients $\hat{A}_{\alpha\beta\lambda\nu}$	$\hat{A}_{\alpha\beta\lambda\nu} \in H^{1,\infty}(\Omega)$	$\hat{A}_{\alpha\beta\lambda\nu} \in H^{2,\infty}(\Omega)$	$\hat{A}_{\alpha\beta\lambda\nu} \in H^{3,\infty}(\Omega)$

TAB. 3.1 – Éléments finis C^0 triangulaires. Estimation d'erreur. Hypothèses sur les schémas d'intégration. Composantes tangentielles

3.3 Approximation de la composante normale. Problème variationnel. Estimation de l'erreur

Dans les sections 3.1 et 3.2 nous avons étudié l'approximation des composantes tangentielles par la méthode des éléments finis. Nous avons établi dans le théorème (3.2.5 page 80) l'estimation d'erreur (3.66 page 81) qui assure la convergence de \hat{u}_h vers \hat{u} solution du problème limite réduit (3.4 page 68). Il nous reste à faire un travail analogue pour la composante normale u_3^o à partir de la relation (3.6 page 68). La relation (3.6 page 68) est une formule de reconstruction de la composante normale à partir des composantes tangentielles du problème limite réduit et de la troisième composante du champ de force. La formule (3.6 page 68) ne concerne que le cas des coques hyperboliques. La formule (3.6 page 68) s'écrit encore sous forme matricielle :

$$(3.83) \quad \mathcal{P} = \begin{cases} u_3^o = \frac{f^3}{4b_{12}^2 A^{1212}} + \langle \mathbb{B}, U \rangle_{\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^6} \\ \text{avec} \\ U^T = [u_1 \ u_{1,1} \ u_{1,2} \ u_2 \ u_{2,1} \ u_{2,2}] \\ \mathbb{B} = [-\Gamma_{12}^1 \ \frac{1}{2} \ \frac{A^{1211}}{2b_{12}^2 A^{1212}} \ -\Gamma_{12}^2 \ \frac{1}{2} \ \frac{A^{1222}}{2b_{12}^2 A^{1212}}] \end{cases}$$

considérons le problème approché noté \mathcal{P}_h :

$$(3.84) \quad \begin{cases} u_{3h}^o = \frac{f^3}{4b_{12}^2 A^{1212}} + \langle \mathbb{B}, U_h \rangle_{\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^6} \\ \text{avec } U_h^T = [u_{h1} \ u_{h1,1} \ u_{h1,2} \ u_{h2} \ u_{h2,1} \ u_{h2,2}] \\ \text{où } U_h^T \text{ est l'écriture matricielle des composantes tangentielles approchées} \end{cases}$$

Théorème 3.3.1 *Si la solution $\hat{u}^o \in \hat{V}^o$ du problème variationnel (3.4 page 68) appartient à l'espace $(H^{n_1+1}(\Omega) \times H^{n_1+1}(\Omega))$, si les coefficients de la matrice $\mathbb{B} \in L^\infty(\Omega)$ et si les composantes du champ de force sont dans $W^{n_1, q}(\Omega)$ avec $n_1 > \frac{2}{q}$ et $q \geq 2$ alors, la solution u_{3h}^o du problème \mathcal{P}_h converge en norme $L^2(\Omega)$ vers u_3^o . Par ailleurs, il existe une constante C telle que l'on ait l'estimation suivante :*

$$(3.85) \quad |u_3^o - u_{3h}^o|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{n_1}$$

Preuve : la linéarité du problème conduit à :

$$|u_3^o - u_{3h}^o| = | \langle \mathbb{B}, U - U_h \rangle |$$

L'inégalité triangulaire appliquée à $|u_3^o - u_{3h}^o|$ en norme $L^2(\Omega)$ nous permet d'écrire

$$(3.86) \quad \left\{ \begin{array}{l} |u_3^o - u_{3h}^o|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |\Gamma_{12}^1|_\infty |u_1^o - u_{1h}^o|_{L^2(\Omega)}^2 + |\Gamma_{12}^2|_\infty |u_2^o - u_{2h}^o|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + |\frac{A^{1211}}{2b_{12}A^{1212}}|_\infty |u_{1,1}^o - u_{1h,1}^o|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \frac{1}{2} (|u_{1,2}^o - u_{1h,2}^o|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_{2,1}^o - u_{2h,1}^o|_{L^2(\Omega)}^2) \\ + |\frac{A^{1211}}{2b_{12}A^{1212}}|_\infty |u_{2,2}^o - u_{2h,2}^o|_{L^2(\Omega)}^2 \end{array} \right.$$

en posant $C = Max\{|\Gamma_{12}^1|_\infty, |\Gamma_{12}^2|_\infty, |\frac{A^{1211}}{2b_{12}A^{1212}}|_\infty, |\frac{A^{1211}}{2b_{12}A^{1212}}|_\infty, \frac{1}{2}\}$, nous avons

$$|u_3^o - u_{3h}^o|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\hat{u}^o - \hat{u}_h^o\|$$

qui d'après le théorème (3.2.5 page 80) conduit à l'estimation recherchée.

3.3.1 Formulation variationnelle de la formule de reconstruction

Il est également possible d'approcher la composante normale u_3^o issue de la formule de reconstruction par la méthode des éléments finis il est utile de donner une formulation variationnelle du problème (3.6 page 68) . Celle-ci prend alors la forme suivante dans l'espace $H=L^2(\Omega)$:

$$(3.87) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_3^o \in H \text{ tel que} \\ b(u_3^o, w) = L(w), \forall w \in H \end{array} \right.$$

où l'on peut poser au choix :

$$(3.88) \quad \left\{ \begin{array}{l} b(u_3^o, w) = \int_{\Omega} b_{\epsilon\mu} A^{\epsilon\mu\gamma\delta} b_{\gamma\delta} u_3^o w dS \\ L(w) = \int_{\Omega} (f^3 w + b_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta\lambda\nu} E_{\lambda\nu}(\hat{u}^o)) dS. \end{array} \right.$$

ou encore

$$(3.89) \quad \left\{ \begin{array}{l} b(u_3^o, w) = \int_{\Omega} u_3^o w dS \\ L(w) = \int_{\Omega} \frac{(f^3 w + b_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta\lambda\nu} E_{\lambda\nu}(\hat{u}^o))}{b_{\epsilon\mu} A^{\epsilon\mu\gamma\delta} b_{\gamma\delta}} dS. \end{array} \right.$$

la formulation (3.89 page 87) est la plus naturelle et simplifie le traitement des estimations de l'erreur dans la mesure où dans la forme bilinéaire $b(., .)$ ne figurent pas de coefficients variables. Par ailleurs, il est clair que sur l'espace H la forme bilinéaire $b(., .)$ définit une norme. La forme linéaire est de surcroît continue sur l'espace H d'où :

Théorème 3.3.2 *Étant donnée $f^3 \in (H^1(\Omega))'$ alors le problème variationnel (3.87 page 87) admet une et une seule solution dans H*

Preuve : Appliquer le théorème de Lax-Milgram dans l'espace H .

Nous sommes à présent en mesure de calculer la composante normale à partir de la méthode des éléments finis.

Théorème 3.3.3 *Supposons donnés les espaces d'éléments finis. Supposons également que l'élément fini de référence correspondant vérifie les hypothèses suivantes :*

$$(3.90) \quad \hat{P} = P_{n_1}(\hat{K})$$

où n_1 désigne un entier, tels que $1 \leq n_1$. L'entier n_1 est supposé tel que l'on ait :

$$(3.91) \quad H^{n_1} \hookrightarrow C^0(\hat{K})$$

Soit H_h l'espace de dimension finie définie tel que l'on ait $H_h \subset H$.

On suppose que le schéma d'intégration numérique sur l'ensemble de référence \hat{K} vérifie les propriétés suivantes :

$$(3.92) \quad \forall \hat{\phi} \in P_{2n_2}, \hat{E}(\hat{\phi}) = 0,$$

Alors, si la solution $u_3^o \in H$ du problème variationnel (3.87 page 87) appartient à l'espace $(H^{n_1}(\Omega))$, si les coefficients de la matrice $\mathbb{A} \in W^{n_1, \infty}(\Omega)$ et si la composante du champ de force f^3 est dans $W^{n_1, 2}(\Omega)$ alors il existe deux constantes C et $h_1 > 0$ indépendantes de h telles que $\forall h < h_1$ on ait l'estimation suivante :

$$(3.93) \quad |u_3^o - u_{3h}^o|_H \leq Ch^{n_1} (\|u_3^o\|_{n_1, 2, \Omega} + M \|f^3\|_{n_1, 2, \Omega})$$

où u_{3h}^o est une solution du problème approché.

Preuve : Il suffit d'adapter les démonstrations qui ont servi au problème limite réduit concernant les composantes tangentielles.

On retrouve le même résultat qu'au théorème 3.3.1.

3.4 Comparaison des résultats numériques et analytiques dans le cadre de la programmation du problème limite réduit

Dans cette section nous présentons plusieurs cas tests. Dans la sous section 3.4.1 nous comparons les résultats obtenus par le code *Modulef* et la programmation du problème limite réduit.

1. le premier test concerne le parabolioïde hyperbolique introduit au chapitre II.
2. le second second test concerne une géométrie différente. Il s'agit d'une voile hyperbolique soumise à un champ de pression uniforme.
3. le troisième test concerne encore une fois le parabolioïde hyperbolique mais soumis à un champ de force très régulier.

Enfin, dans la section 3.5 nous construisons un champ de solutions dans lequel figure une discontinuité. Le but de ces tests est d'observer le comportement du code pour des forces extérieures non régulières.

3.4.1 Comparaison entre les résultats du code *Modulef* et de la programmation du problème limite réduit

Dans cette sous section nous appliquons les résultats des sections précédentes. Le premier test numérique concerne la simulation d'un parabolioïde hyperbolique soumis à une pression uniforme sur toute la surface. Nous faisons une étude comparative des solutions numériques issues du code *Modulef* et les solutions issues de la programmation du problème limite réduit à l'aide des éléments finis de Lagrange de type P_1 ou P_2 . Dans le second test nous changeons de géométrie. Nous considérons un domaine de référence ayant la forme d'un triangle dont l'hypoténuse est courbe. L'image du domaine de référence par l'application envisagée est une voile. Comme précédemment cette voile est soumise à un champ de pression uniforme. Nous résolvons d'une part le problème par le code *Modulef* en utilisant les éléments finis d'Argyris-Ganev et d'autre part par les éléments finis de type P_1 ou P_2 de la programmation du problème limite réduit. Ces tests permettent de s'assurer du bon comportement des différents algorithmes pour la simulation des coques minces inhibées dont la surface moyenne est de nature hyperbolique.

Parabolioïde hyperbolique. Description

Le domaine de référence est la boule topologique suivante :

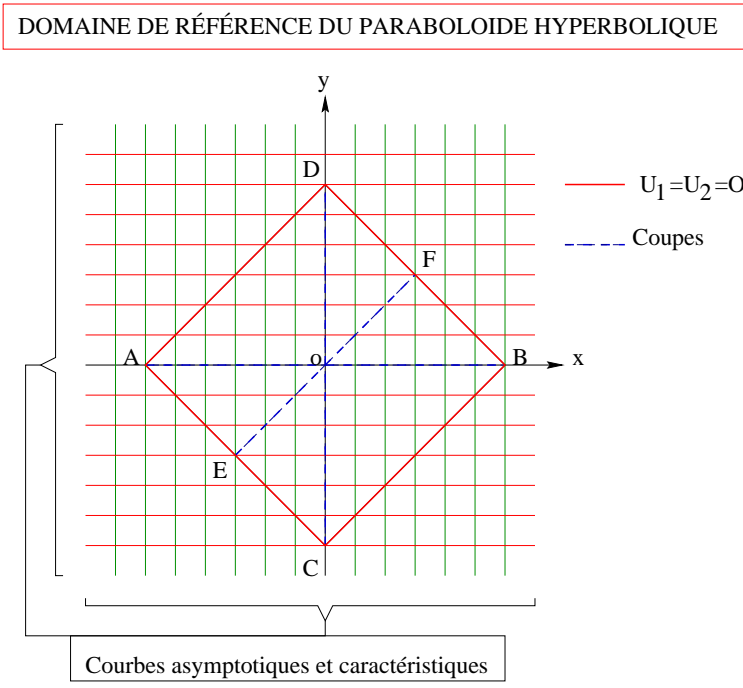
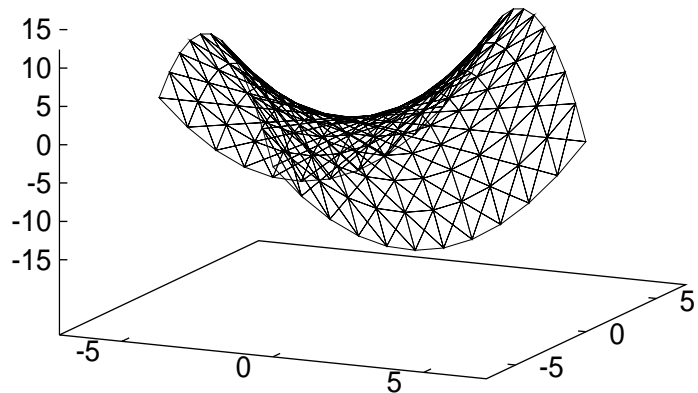


FIG. 3.1 – Domaine de référence pour le parabolöide hyperbolique.

Visualisation du parabolöide hyperbolique



$$(3.94) \quad \bar{\Omega}_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq c \text{ où } c \text{ est le diamètre de la boule}\}$$

La carte locale $(\Omega, \vec{\Phi})$ servant à paramétriser la surface moyenne est donnée par :

$$(3.95) \quad (x, y) \in \Omega_c \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \vec{\Phi}(x, y) \in \mathbb{R}^3 = \begin{cases} x^1 = x, \\ x^2 = y, \\ x^3 = Kxy. \end{cases}$$

Afin d'effectuer les simulations nous devons préciser les valeurs numériques du module d'Young et du coefficient de Poisson. Ces valeurs numériques nous les avons fixées une bonne fois pour toute à $E=28500 \text{ kg.cm}^{-2}$ et $\nu=0.4$. La surface est soumise à la pression uniforme $p=0.01 \text{ kg.cm}^{-2}$, portée par le vecteur normale (\vec{a}_3) . Les conditions aux limites sont celles de l'encastrement sur toute la frontière. Pour illustrer les solutions numériques, nous avons utilisé un maillage régulier. Nous avons fait varier quelques paramètres comme la courbure et les dimensions de la coque. On compare alors les solutions pour la composante normale le long des coupes [AB] et [CD] issues du code Modulef et de la programmation du problème limite réduit

Les tracés (cf. figures 3.2 page 92 à 3.3 page 93) indiquent que, pour les différents cas envisagés, on est en totale concordance. Les figures précédentes permettent de préciser l'erreur relative, ainsi, observe-t-on une erreur relative maximale de 5% sur les composantes normales avec les éléments finis P1 alors qu'avec les éléments finis P2 cette erreur relative est inférieure à 2%. Enfin la figure (3.15 page 104) illustre la manière dont la coque se déforme sous l'action de la pression.

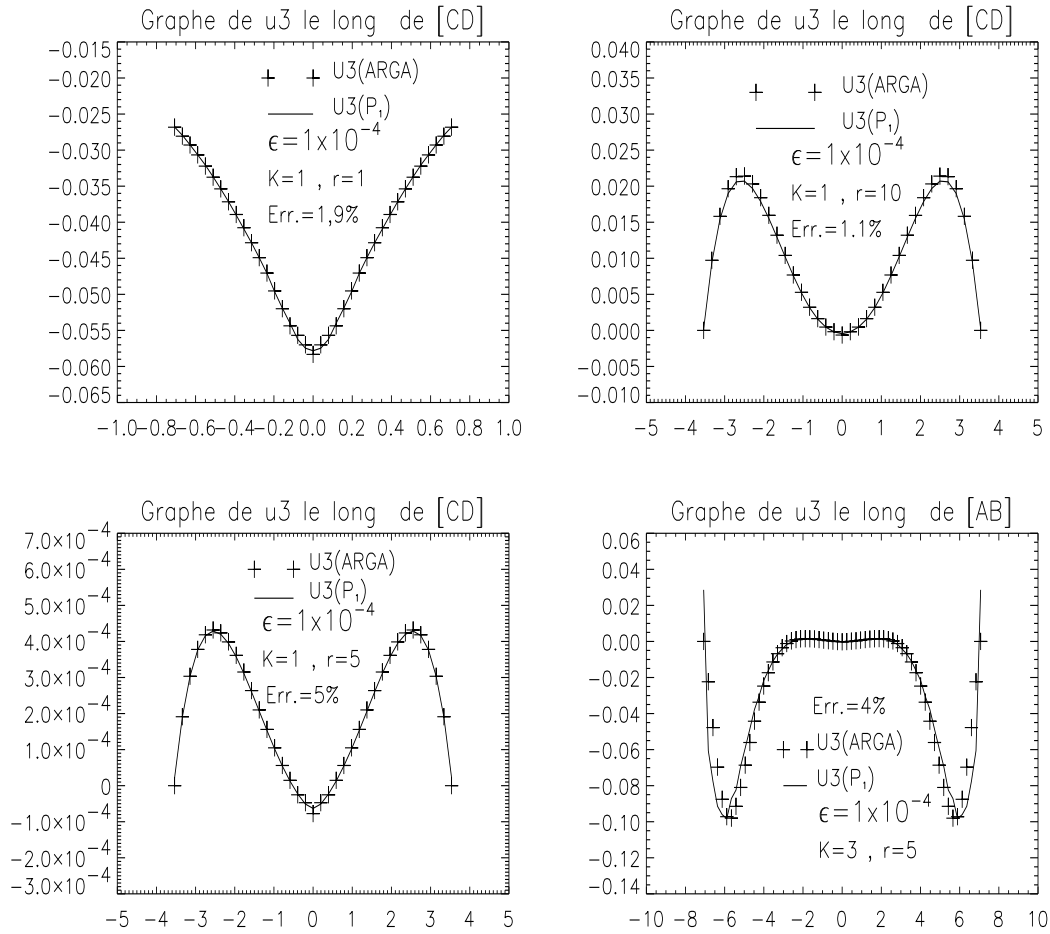
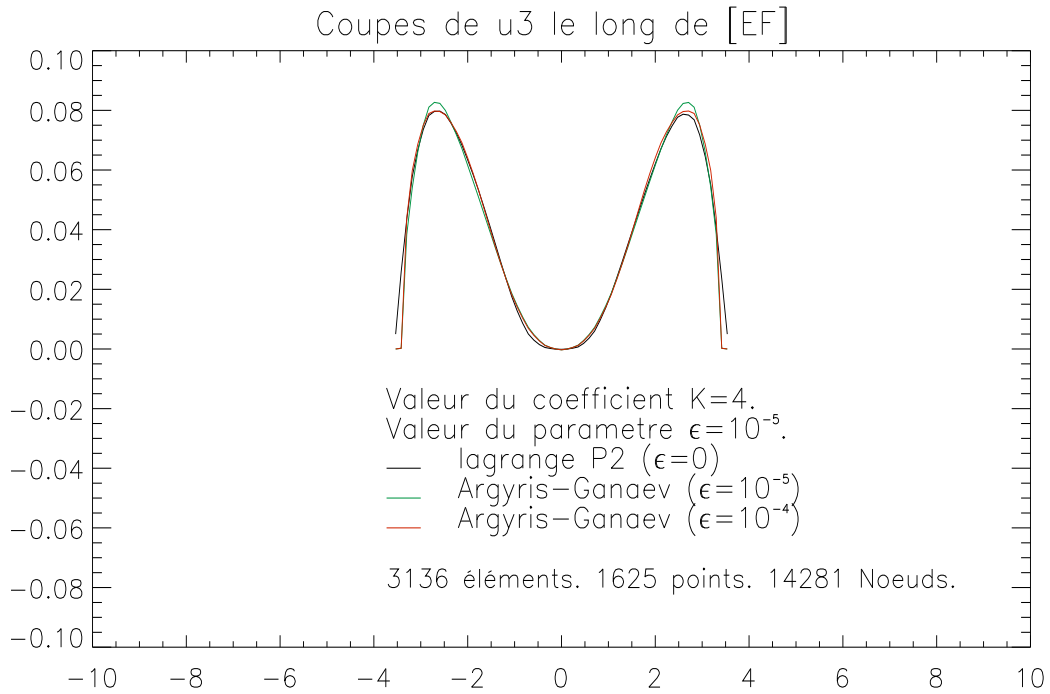
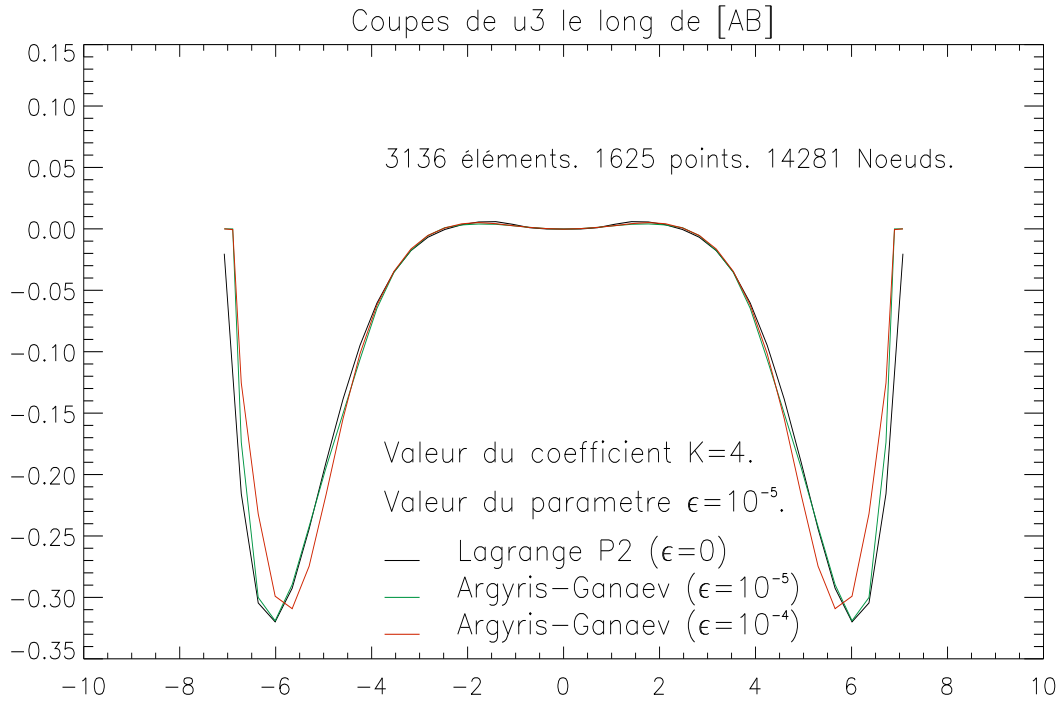


FIG. 3.2 – Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique le long du segment [AB]



Comparaison des graphes de u_3 issues de Modulf et du probleme limite reduit

FIG. 3.3 –

Visualisation de la surface avant deformation

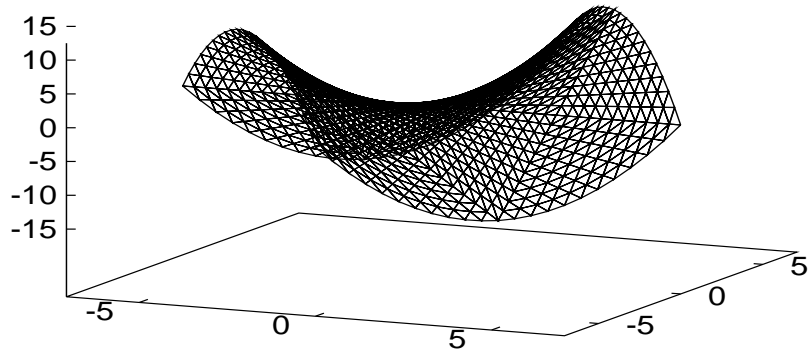


FIG. 3.4 – Parabolöide hyperbolique avant déformation

Visualisation de la surface deformee

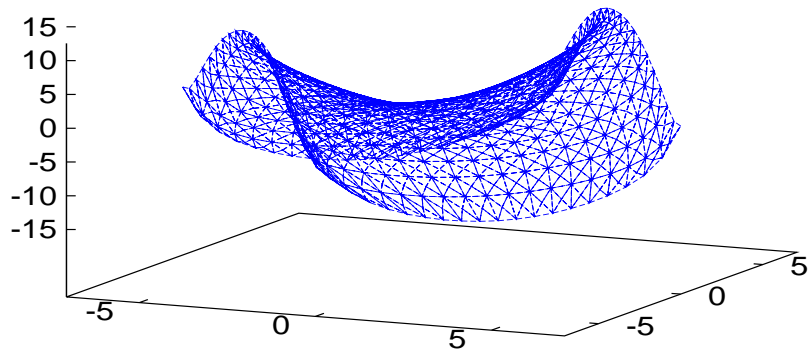


FIG. 3.5 – Déformation du parabolöide hyperbolique sous la pression uniforme

Triangle courbe hyperbolique. Description

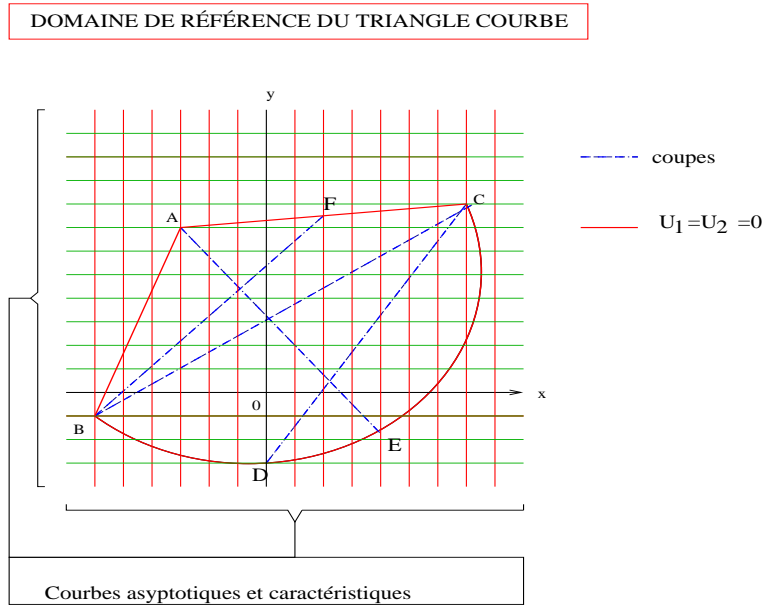
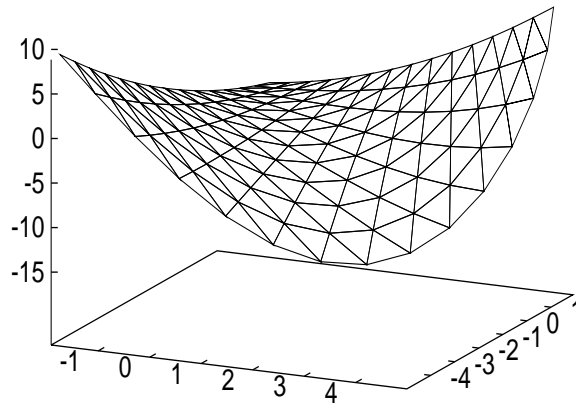


FIG. 3.6 – Domaine de référence pour le triangle courbe

Visualisation du triangle hyperbolique



Il s'agit d'une voile soumise à un champ de pression uniforme. Le domaine de référence est un triangle courbe passant par un point A du plan (cf. figure 3.6 page 95) :

$$\begin{aligned}
 \bar{\Omega}_c = \{ & M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que} \\
 & y - a_1x - b_1 \leq 0 \text{ passant par A,} \\
 & y - a_2x - b_2 \leq 0 \text{ passant par A,} \\
 & y - \sqrt{c^2 - (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \leq 0, \\
 & \text{où } c \text{ est le rayon du cercle centré en A}\}.
 \end{aligned}
 \tag{3.96}$$

La carte locale $(\Omega, \vec{\Phi})$ servant à paramétriser la surface moyenne est donnée par :

$$(x, y) \in \Omega_c \subset \mathbb{R}^2 \longmapsto \vec{\Phi}(x, y) \subset \mathbb{R}^3 = \begin{cases} x^1 = x, \\ x^2 = y, \\ x^3 = xy. \end{cases}
 \tag{3.97}$$

Pour effectuer les simulations nous devons préciser les valeurs numériques du module d'Young et du coefficient de Poisson. Ces valeurs numériques ont été fixées à $E=28500 \text{ kg.cm}^{-2}$ et $\nu=0.4$.

Pour illustrer les solutions numériques, nous allons utiliser un maillage régulier mais dans lequel interviennent des éléments courbes. Ce maillage est issu du code *Modulef*. Nous comparons alors les solutions pour la composante normale \hat{u}_3^0 du problème limite réduit avec celui obtenu par le code *Modulef*. Nous faisons une comparaison en superposant les courbes approchées issues du problème limite réduit et du code *Modulef*.

Les tracés (3.8 page 98) indiquent que, pour les différentes coupes nous avons une très bonne concordance des résultats. La figure (cf. 3.9 page 99) permet d'apprécier la qualité de l'approximation au fur et à mesure que le paramètre ϵ tend vers zéro pour le choix des éléments finis de Lagrange de type P_2 . Il est à noter que les phénomènes de couches limites sont très nettement apparents. Le fait que les frontières soient courbes ne posent aucun problème particulier pour l'approximation numérique des solutions dans le cadre du problème limite réduit. Enfin un tracé de la coque après déformation est donné afin d'illustrer la manière dont cette dernière réagit sous l'action du champ de pression (cf. figure 3.7 page 97).

Visualisation de la surface déformée

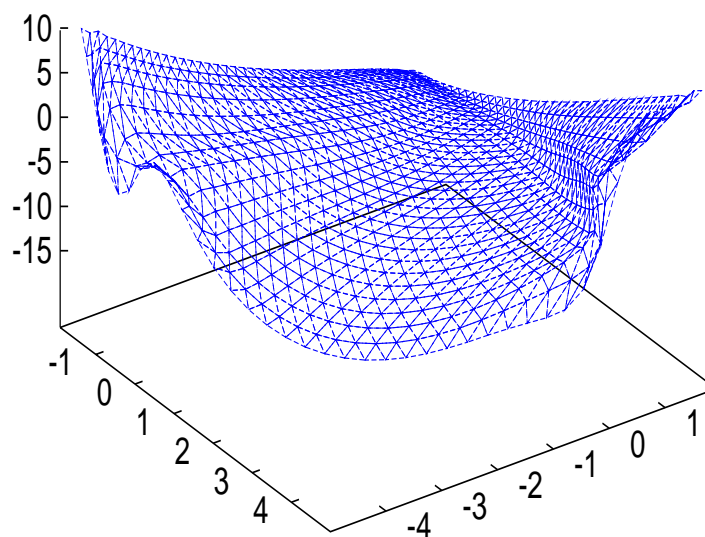


FIG. 3.7 – Déformation de la voile sous la pression uniforme

3.4. COMPARAISON DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET ANALYTIQUES
 DANS LE CAS DE LA PROBLÈME DE PROLONGEMENT À L'ÉLÉMENT PROBLÈME LIMITE RÉDUIT

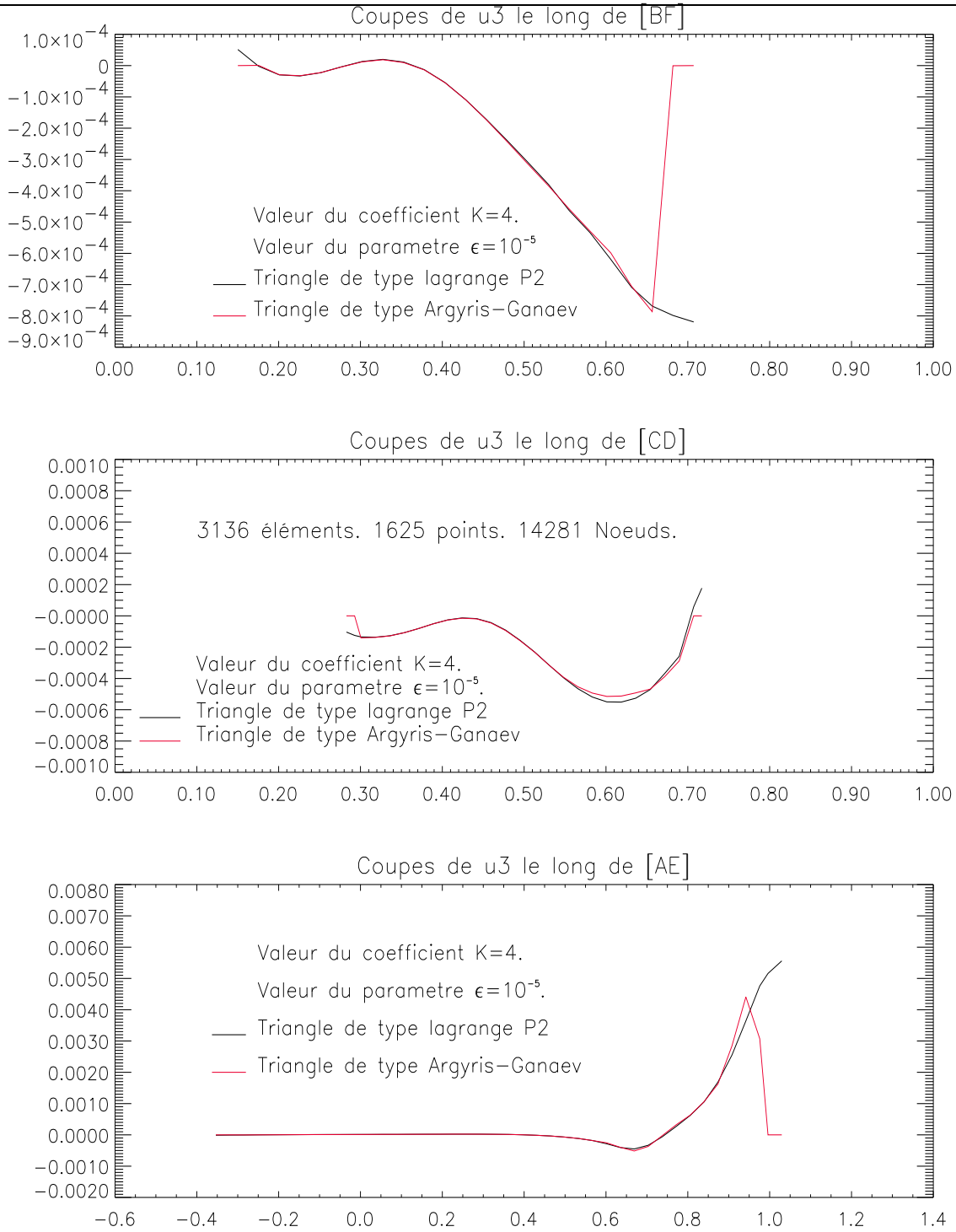


FIG. 3.8 – Comparaison des grahes de U_3 issues de Modulef et du problème limite réduit

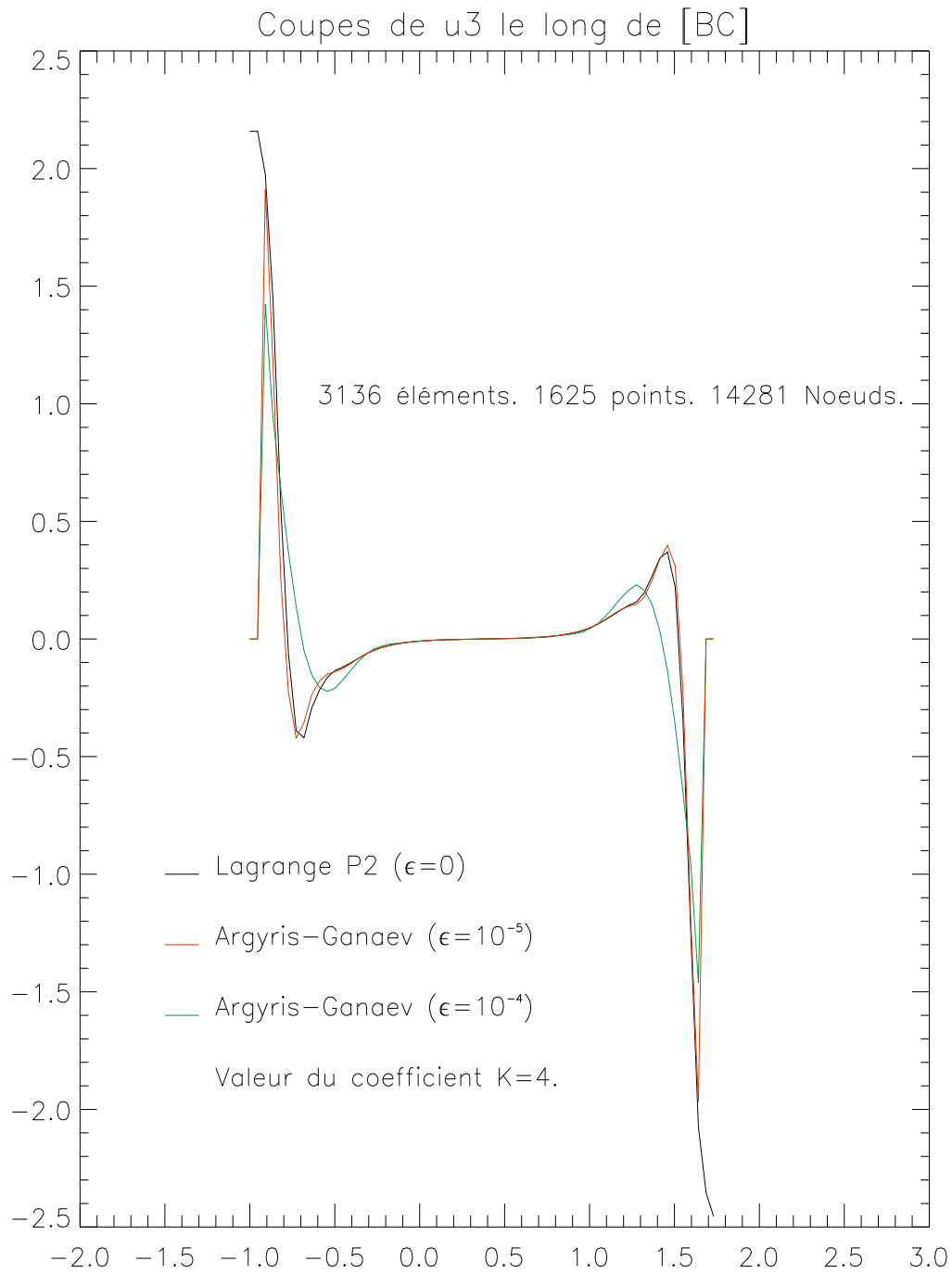


FIG. 3.9 – Comparaison des graphes de U_3 issues de Modulef et du problème limite réduit

Cas du paraboïde sous l'action de champ de force très réguliers

À présent nous allons construire un champ de déplacements \vec{u}^0 et grâce au logiciel MapleV, nous évaluons les composantes du champ de forces \vec{f} auquel est soumis la surface. Mais avant de construire ce champ de forces précisons la nature des conditions aux limites. Pour cela nous appliquons les résultats de la section 1.6 page 19 du chapitre 1. Nous remarquons que toutes les frontières du domaine Ω_c sont non caractéristiques si bien que toutes les conditions limites portant uniquement sur les composantes tangentielles $\vec{u}^0 = (u_1^0, u_2^0)$ sont licites. Afin de simplifier les tests numériques, nous décidons d'imposer la condition de fixation sur tout le bord du domaine, ce qui veut dire que nous imposons les conditions de Dirichlet pour les composantes tangentielles. Ceci fait, nous pouvons passer à l'étape suivante qui est la construction effective du champ de déplacements.

On se donne une fonction $C^\infty(\Omega_c)$ défini par :

$$(3.98) \quad \psi(x, y) = ((x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) + c^4)$$

Remarque 3.4.1 *On remarque, que cette fonction est à trace nulle sur tout le bord du domaine Ω_c , ainsi les conditions de Dirichlet homogènes sont satisfaites.*

Afin de satisfaire les hypothèses du théorème 6 du chapitre 1, nous imposons au champ de forces $\vec{f} = (f^1, f^2, f^3)$ d'appartenir à l'espace $(\hat{V}^0)' \times H^1(\Omega_c)$. Nous imposons à la troisième composante du champ de force d'être nulle, ainsi les calculs se trouvent simplifiés. On se place dans les situations suivantes : on prend un champ de déplacements régulier :

$$(3.99) \quad \vec{u}^0 = \begin{cases} u_1^0 = \psi(x, y), \\ u_2^0 = \psi(x, y), \\ u_3^0 = \frac{A^{1112}}{2b_{12}A^{1212}}\partial_x\psi(x, y) + \frac{A^{2212}}{2b_{12}A^{1212}}\partial_y\psi(x, y) + \\ \quad - \left(\frac{\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2}{b_{12}}\right)\psi(x, y) + \frac{1}{2b_{12}}(\partial_y\psi(x, y) + \partial_x\psi(x, y)). \end{cases}$$

On en déduit le champ de force respectif associé à (3.99 page 100)

$$(3.100) \quad \vec{f} = \begin{cases} f_1 = -[\partial_x A^{1111}\partial_x\psi(x, y) - \Gamma_{12}^2 A^{1111}\partial_x\psi(x, y)], \\ f_2 = -[\partial_x A^{2211}\partial_x\psi(x, y) - \Gamma_{12}^2 A^{2211}\partial_x\psi(x, y)], \\ f_3 = 0. \end{cases}$$

Pour illustrer les solutions numériques, nous avons utilisé un maillage régulier issu de Modulf. Nous comparons alors les solutions pour la composante normale \hat{u}_{3h}^o avec les solutions analytiques du problème limite réduit. La figure 3.13 (cf. page 103) représente l'évolution du logarithme de l'erreur entre u_3^o et u_{3h}^o dans la norme L^2 en fonction de $\text{Log}(h)$ pour notre solution analytique et les éléments P_1 . Enfin nous avons visualisé la coque après déformation sous l'action du champ de forces donné (cf. figure 3.15 page 104).

3.4. COMPARAISON DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET ANALYTIQUES
 DANS LE CAS DE LA PROXIMITÉ D'UN PROBLÈME LIMITE RÉDUIT

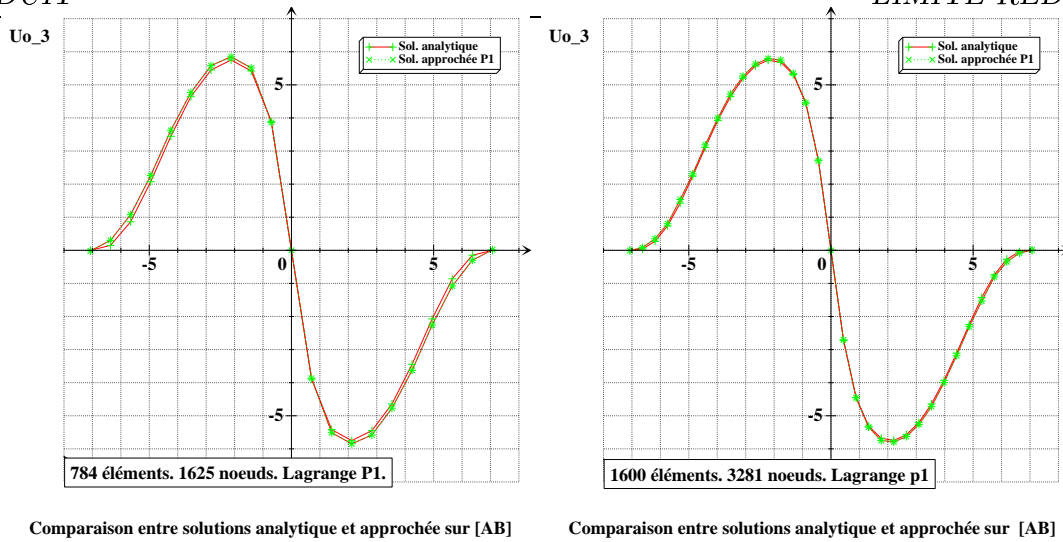


FIG. 3.10 – Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique le long des segments [AB] et [CD]

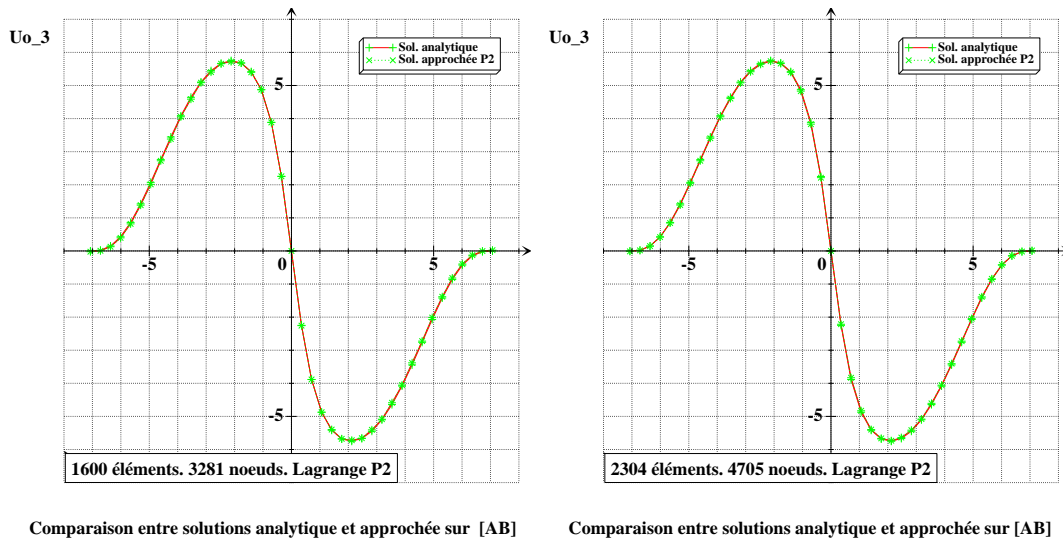
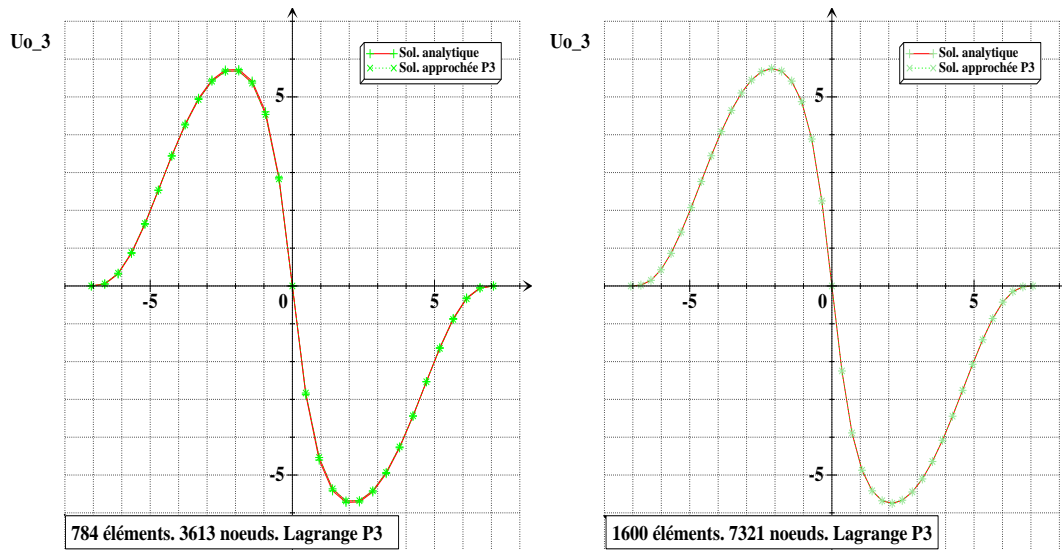


FIG. 3.11 – Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique le long des segments [AB] et [CD]

3.4.2 Commentaires

Les tests présentés dans la section 3.4 montrent qu'il est possible d'approcher le problème des coques hyperboliques inhibées à l'aide du problème limite réduit dès lors que le rapport ε de l'épaisseur aux autres dimensions de la coque est inférieur ou égale à 10^{-4} . En l'absence de couche limite, le code donne des solutions numériques aussi fidèle



Comparaison entre solutions analytique et approchée sur [AB]

Comparaison entre solutions analytique et approchée sur [AB]

FIG. 3.12 – Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique le long des segments [AB] et [CD]

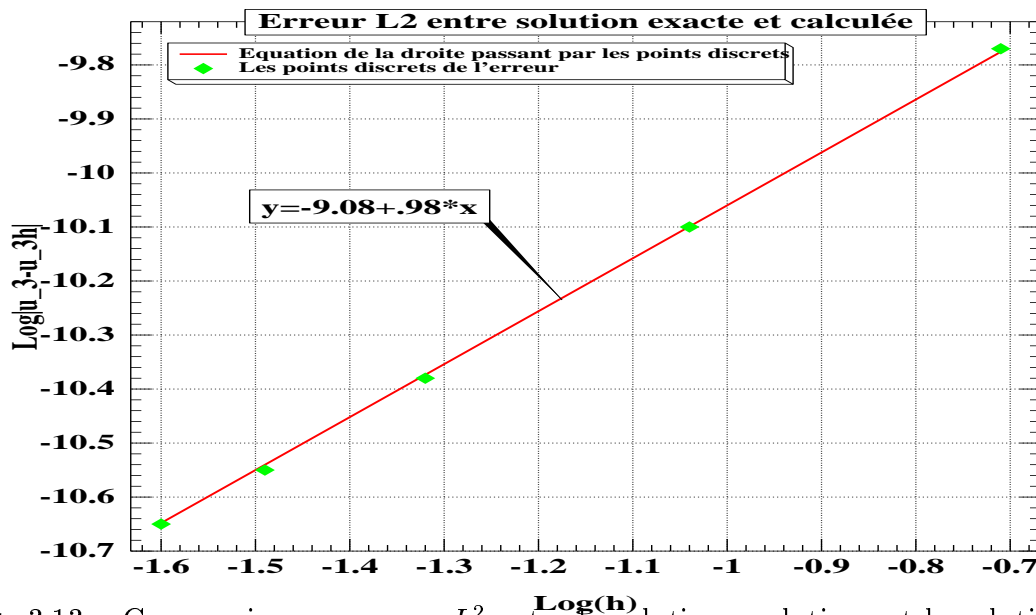


FIG. 3.13 – Comparaison en norme L^2 entre la solution analytique et la solution numérique

Visualisation de la surface avant déformation

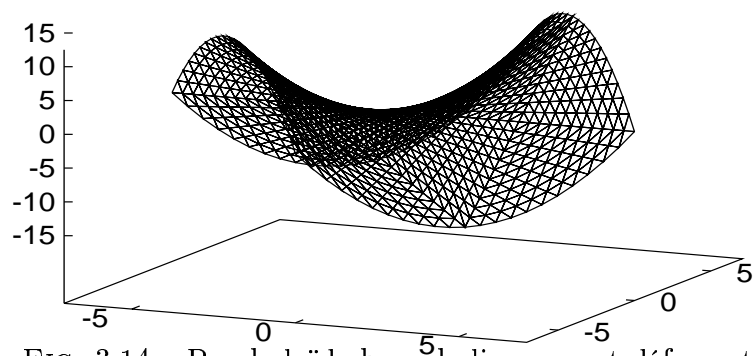


FIG. 3.14 – Paraboloïde hyperbolique avant déformation

Visualisation de la surface déformée

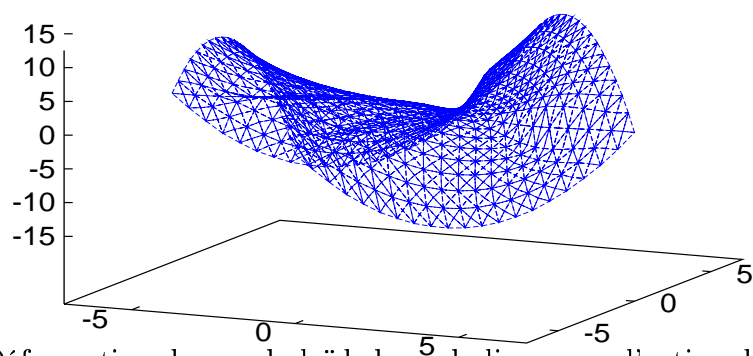


FIG. 3.15 – Déformation du paraboloïde hyperbolique sous l'action du champ de forces 3.99 (cf. page 100)

que possible. En revanche, Il est à noter qu'en présence de couche limite le code ne permet pas de bien prendre en compte ce phénomène. Le problème des couches limites n'est pas l'objet de ce mémoire. En conséquence aucun test n'a été réalisé en cherchant à observer le comportement du code quand on raffine le maillage au voisinage des couches limites.

3.5 Comportement du code quand les forces extérieures présentent des discontinuités

Dans la section 3.4 nous avons vu que le code numérique mis au point pour le problème limite réduit se comporte convenablement dès lors que les données du problème sont suffisamment régulières. Par ailleurs, nous savons que les éléments finis d'Argyris-Ganev ne sont pas adaptés pour l'étude des problèmes des coques lorsque les données présentent des singularités. Dans cette section nous examinons le comportement du code numérique du problème limite réduit pour un exemple précis, c'est-à-dire pour des forces extérieures présentant des singularités le long des caractéristiques.

Afin d'illustrer le comportement du code pour des forces extérieures présentant des discontinuités, nous envisageons un champ de déplacements ayant une singularité le long d'une caractéristique.

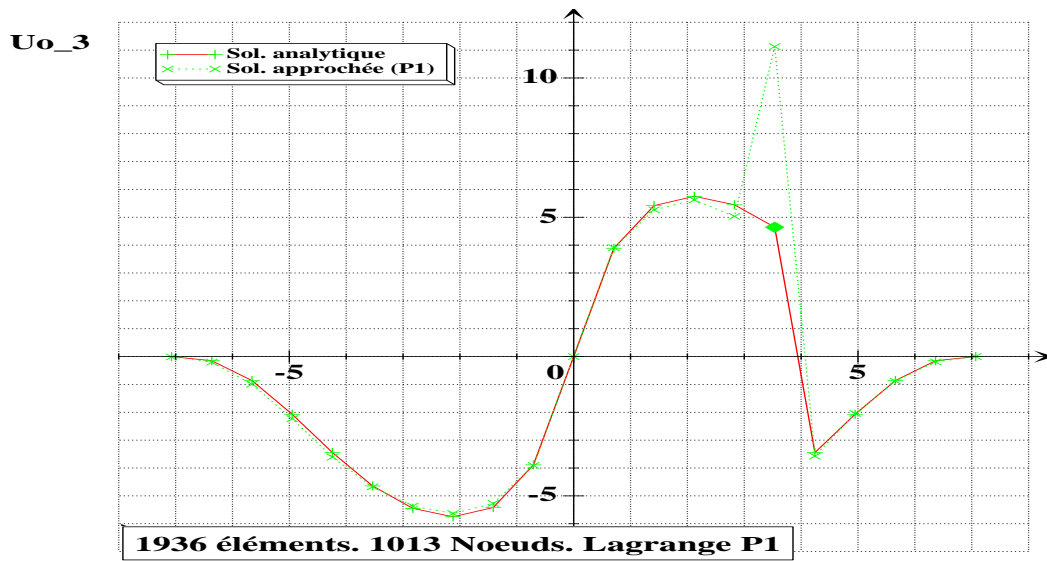
Considérons le champ de déplacements $\Phi(x, y)$ défini par (3.101) présentant une discontinuité.

$$(3.101) \quad \vec{u} = \begin{cases} u_1 = \psi(x, y).H(y) \in L^2(\Omega) \\ u_2 = 0 \in L^2(\Omega) \\ u_3 = \left[\frac{A^{1211}}{2b_{12}A^{1212}} \partial_x \psi - \frac{\Gamma_{12}^1}{b_{12}} \psi + \frac{1}{2b_{12}} \partial_y \psi \right].H(y) \\ \quad + \frac{[[\psi(x)]]}{2b_{12}} \delta_0(y) \in \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

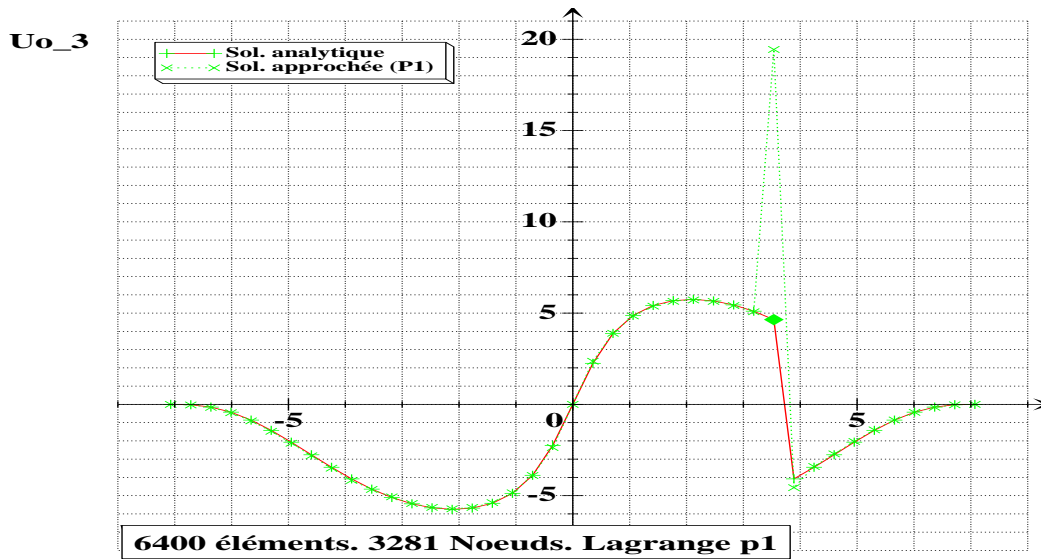
nous en déduisons alors le champ de force associé.

$$(3.102) \quad \vec{f} = \begin{cases} f_1 = -[\partial_x A^{1111} \partial_x \psi(x, y) - \Gamma_{12}^2 A^{1111} \partial_x \psi(x, y)]H(y - y_0), \\ f_2 = -[\partial_x A^{2211} \partial_x \psi(x, y) - \Gamma_{12}^2 A^{2211} \partial_x \psi(x, y)]H(y - y_0) \\ \quad + [A^{2211} \partial_x \psi(x, y)]\delta(y - y_0), \\ f_3 = 0. \end{cases}$$

Nous avons fait tourner le code avec le champ de force (3.102). Nous avons utilisé deux types de maillage. L'un des maillage est de type structuré (cf. figure 2.24) et l'autre maillage est non structuré (cf. figure 2.25). Nous comparons alors les solutions pour la composante normale \hat{u}_{3h}^o avec la solution analytique.

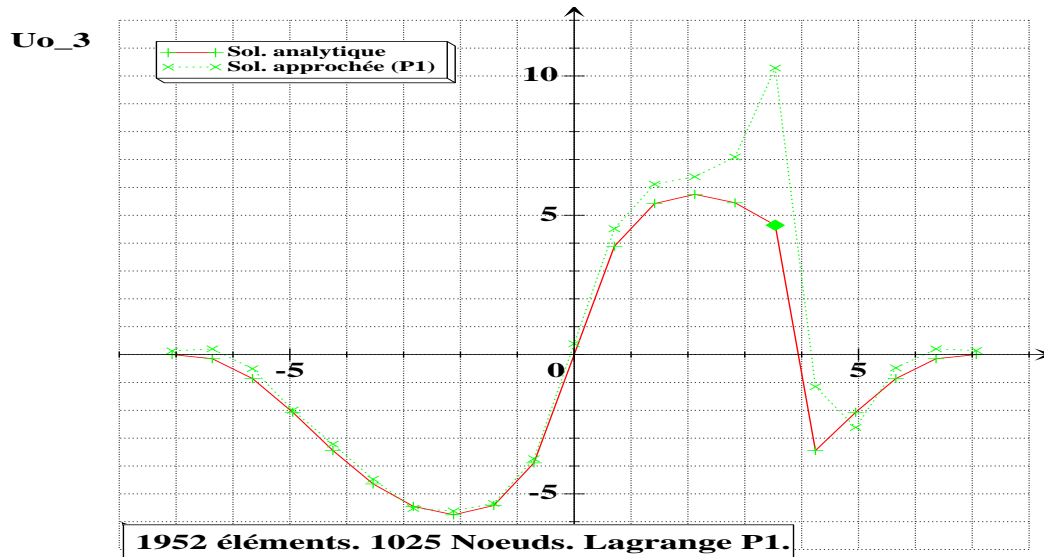


Comparaison entre solutions analytique et approchée sur $[CD]$



Comparaison entre solutions analytique et approchée sur $[CD]$

FIG. 3.16 – Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique le long du segment $[CD]$ pour un maillage structuré et pour la force extérieure 3.102



Comparaison entre solutions analytique et approchée sur [CD]

FIG. 3.17 – Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique le long du segment [CD] pour un maillage non structuré et pour la force extérieure 3.102

3.5.1 Commentaires

Les tracés (cf. figure 3.5 page 107) et (cf. figure 3.16 page 107) montrent que le code se comporte de manière très satisfaisante dans le cas où nous avons affaire à des forces extérieures présentant des discontinuités et quand le maillage est structuré. Par ailleurs, nous remarquons qu'en raffinant le maillage les résultats sont meilleurs. Sur les figures 3.5 et 3.16 seul le Dirac de la solution numérique est reporté. Le Dirac de la solution analytique ne figure pas sur la courbe. Nous avons cependant précisé sa localisation à l'aide d'un losange plein. Le maillage qui a servi au calcul suit en tous points les lignes caractéristiques. Un maillage qui ne suit pas les lignes caractéristiques donne des résultats de moins bonne qualité (cf. figure 3.17). Enfin, Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire de raffiner le domaine dans sa globalité. En effet, dans notre exemple nous savons où se trouve la singularité, en conséquence il suffit de raffiner le maillage au voisinage de la zone cette discontinuité qui est portée par une caractéristique.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié et établi la convergence des solutions numériques vers les solutions du problème membranaire. En effet, l'étude porte sur la convergence des composantes tangentielles du problème limite réduit des coques inhibées.

Les hypothèses sont que la surface moyenne (S) de la coque est définie comme l'image d'un domaine borné (Ω) du plan par une carte régulière (Ω, Ψ) , nous considérons une triangulation convenable τ_h du domaine Ω et l'existence d'une application affine F_K mettant en correspondance biunivoque chaque triangle K de la triangulation τ_h avec le triangle de référence \hat{K} de l'espace affine et dont les sommets sont les images des sommets du triangles \hat{K} par l'application Ψ .

Nous pouvons alors établir les théorèmes (3.2.5 page 80) et (3.3.2 page 88) qui permettent d'estimer l'ordre de convergence des composantes tangentielles et normales en fonction du choix des éléments finis de Lagrange et d'établir les régularités requises pour les différents coefficients (cf. tableau 3.1).

Les différents tests numériques montrent clairement que les éléments finis de type P_1 sont de très bons candidats pour l'approximation des solutions numériques. Il convient alors de recouvrir le domaine de référence avec des éléments structurés respectant les lignes asymptotiques. L'approximation des solutions avec discontinuité ne fait plus apparaître d'oscillations parasites contrairement à ce qui se produit avec le choix des éléments d'Argyris et Ganev. Par ailleurs, lors du calcul des solutions avec discontinuité, il semble intéressant de raffiner le maillage au voisinage des caractéristiques, puisque les singularités ne se propagent que le long des caractéristiques et que celles-ci sont bien déterminées. C'est-à-dire qu'il est inutile de raffiner le domaine dans sa globalité. Ceci permet donc d'établir une première stratégie dans le calcul des singularités des coques hyperboliques inhibées très minces. D'autre part, l'étude des couches limites par le problème limite réduit sort du cadre de ce mémoire et fait à l'heure actuelle l'objet de recherche en cours. On pourra se référer au C.R.A.S. de Leguillon, Sanchez-Hubert, Sanchez-Plencia à paraître.

L'intérêt de cet algorithme pour traiter le problème membranaire réside dans le fait qu'il est très rapide même si parfois il faut accroître considérablement le nombre des inconnues. Il utilise des éléments finis de bas degrés, très souples à implémenter. La seule restriction est qu'il est uniquement adapté au cas des coques très minces et inhibées, c'est-à-dire, dès lors que l'épaisseur relative ε de la coque tend vers zéro.

Chapitre 4

Non réflexion de singularités dans le cas de coques membranaires hyperboliques inhibées

Dans ce chapitre nous abordons le délicat problème des réflexions aux frontières concernant les équations membranaires des coques pour différentes conditions aux limites. Nous montrons (cf. théorème 4.3.1 page 129) qu'il n'y a pas de réflexion pour le choix des conditions aux limites admissibles pour les coques. Nous donnons un certain nombre d'exemples introductifs aussi bien mécaniques que mathématiques pour bien comprendre les différents phénomènes mis en jeu lors des réflexions. Enfin, nous faisons un bref rappel mathématique des systèmes des équations aux dérivées partielles hyperboliques du premier ordre. Nous terminons ce chapitre par des exemples pour montrer comment exploiter les théorèmes.

4.1 Position du problème

D'après le chapitre I (cf. section 1.3.1 page 15) de ce mémoire nous avons vu que les conditions aux limites compatibles avec les équations membranaires des coques sont les suivantes dès lors que les frontières ne sont pas caractéristiques :

$$(4.1) \quad \mathbf{v}^0_{|\partial\Omega} = \vec{0} \text{ ou bien } \begin{cases} \mathbf{v}^0_{|\partial_o\Omega} = \vec{0} \\ T^{\alpha\beta}(\mathbf{v}^0)n_{\beta|\partial\Omega/\partial_o\Omega} = 0. \\ \text{où } \partial_o\Omega \text{ est une partie du bord } \partial\Omega \end{cases}$$

dans le cas où certaines parties des frontières sont caractéristiques les conditions aux

limites admissibles sont les suivantes puisque le choix de la paramétrisation de la coque est telle que les lignes asymptotiques coïncident avec les lignes coordonnées :

$$(4.2) \quad \begin{cases} v_1 = 0 \text{ sur } x^1 = cte, \\ v_2 = 0 \text{ sur } x^2 = cte \end{cases}$$

L'idée sous-jacente des exemples qui nous servent de support pour l'étude des réflexions aux frontières concernant les coques est leur caractère explicite, mais pas simple pour autant. L'artifice consiste à perturber les équations, par le biais de champs de déplacements présentant une (ou plusieurs) discontinuité(s). Ces discontinuités sont portées par les caractéristiques. La question à laquelle on aimerait pouvoir répondre est la suivante : que se passe-t-il si une de ces discontinuités rencontre une frontière du domaine étant donné que sur celle-ci sont prescrites des conditions aux limites déterminées ?

4.1.1 Étude de quelques cas tests

Dans cette partie nous présentons des simulations effectuées par un code numérique, mais concernant un parabolôïde hyperbolique paramétrisé à l'aide d'une carte locale (Ω, Ψ) . Le domaine de référence est $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq r\}$ et, où l'application Ψ est définie par : $\Psi = (x, y, xy)$. Nous désignons par $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4)$ les frontières du domaine et nous supposons qu'il existe des applications bijectives que nous noterons $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ avec $\Sigma_i = \{(x, y) \mid y = \phi_i(x), 1 \leq i \leq 4\}$ où ϕ_i est définie sur $[0, r]$ à valeurs dans $[0, r]$ (cf. figure 4.1 page 113).

Certains exemples présentés ici sont simples mais non nécessairement résolubles à la main néanmoins l'approche variationnelle permet de les résoudre complètement. Dans ces exemples nous avons joué sur les forces extérieures et les conditions aux limites.

Le premier exemple 4.1.1 comporte trois cas tests qui utilisent des conditions aux limites entièrement compatibles avec les équations membranaires des coques.

En revanche dans le second exemple 4.1.2, les deux cas tests utilisent des conditions aux limites mathématiquement admissibles mais incompatibles avec les équations membranaires des coques puisque le problème variationnel pour les coques ne permet pas d'avoir ce type de conditions aux limites.

Les exemples 4.1.3 et 4.1.4 qui suivent sont en revanche des cas tests résolubles à la main. L'intérêt de ces exemples réside dans le fait qu'ils permettent de mieux appréhender la difficulté des réflexions aux frontières des équations membranaires. Ces exemples sont purement mathématiques en effet, les équations membranaires sont des équations strictement hyperboliques.

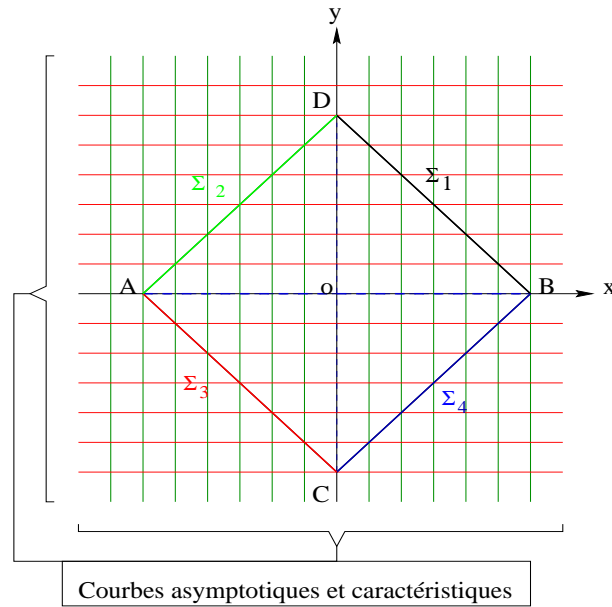


FIG. 4.1 – Visualisation du domaine de référence.

Exemple 4.1.1

Dans le premier cas test nous avons fixé $\vec{f} = \vec{0}$ et nous avons encasté la totalité de la frontière de la façon suivante : sur les frontières $\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_4$ nous avons imposé un déplacement nul, alors que sur la frontière Σ_2 pour les composantes tangentielles du déplacement nous avons imposé les conditions aux limites suivantes :

$$(4.3) \quad \begin{cases} u_1 = H(y - y_0), \\ u_2 = 0. \end{cases} \quad \text{où } H(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } y > 0, \\ \frac{-1}{2} \text{ si } y < 0. \end{cases}$$

Ainsi on génère une discontinuité uniquement le long des caractéristiques ($y=cte$). Après calcul, on visualise la déformée de la surface (cf. figure 4.2 page 114). Sur la figure on voit nettement apparaître la discontinuité.

Dans le second cas test on libère la frontière Σ_1 , c'est-à-dire que l'on n'impose aucune condition aux limites sur les déplacements. Au niveau des équations cela revient à dire que $T^{11}n_1 = T^{22}n_2 = 0$. La figure 4.3 (cf. page 115) montre que l'on retrouve bien la discontinuité, mais on n'observe aucun phénomène type "réflexion" c'est-à-dire que la discontinuité initiale, générée par la donnée sur Σ_2 , ne s'est pas réfléchi sur une autre direction caractéristique.

Dans le troisième cas test, on impose sur les frontières $\{\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4\}$ la condition d'encastement, c'est-à-dire $\vec{U} = \vec{0}$. On libère la frontière Σ_1 ce qui revient à dire que

$T^{11}n_1 = T^{22}n_2 = 0$. On particularise la force extérieure \vec{f} en sorte qu'elle soit dans $V^0 \times H_0^1(\Omega)$, mais présentant une singularité le long de la caractéristique $y = y_0$. La figure 4.4 (cf. page 115) indique une double discontinuité : l'une dans la direction des caractéristiques $y = y_0$ et l'autre dans la direction des caractéristiques $x = x_0$, ce qui fait penser à un phénomène de "réflexion" puisque la discontinuité, portée par la caractéristique $y = y_0$ introduite par la donnée \vec{f} , s'est réfléchié sur une autre direction caractéristique.

Exemple 4.1.2

Dans le quatrième cas test, nous nous donnons à nouveau une force extérieure identiquement nulle, et nous imposons sur la frontière Σ_2 une condition aux limites de la forme (4.3 page 113). Sur la frontière Σ_1 nous imposons une relation affine entre les inconnues (u_1, u_2) et nous encastrons le reste de la frontière. Comme l'indique la figure 4.5 (cf. page 116) on retrouve à nouveau un phénomène de "réflexion" c'est-à-dire que la discontinuité initiale s'est réfléchié dans une autre direction caractéristique.

Dans le cinquième cas test, nous poursuivons l'exemple précédent en imposant successivement des relations affines entre les inconnues (u_1, u_2) sur les frontières Σ_1 et Σ_2 . Comme l'indique la figure 4.6 (cf. page 116) on retrouve à nouveau un phénomène de "réflexion" c'est-à-dire que la discontinuité initiale s'est réfléchié dans une autre direction caractéristique.

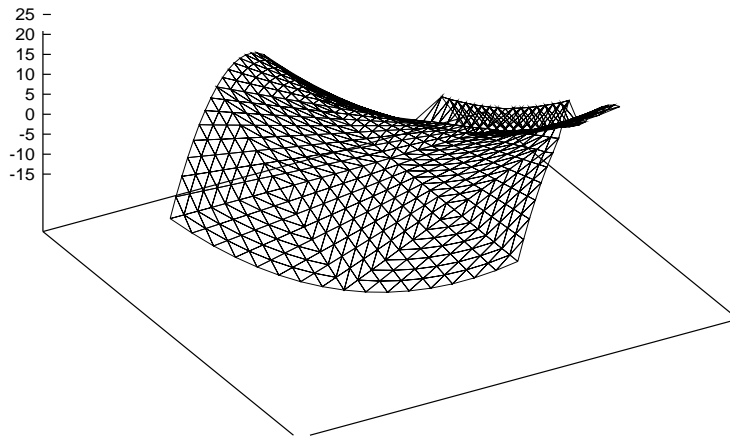


FIG. 4.2 – Visualisation de la déformée de la coque dans le cas où la totalité de la frontière est encastrée.

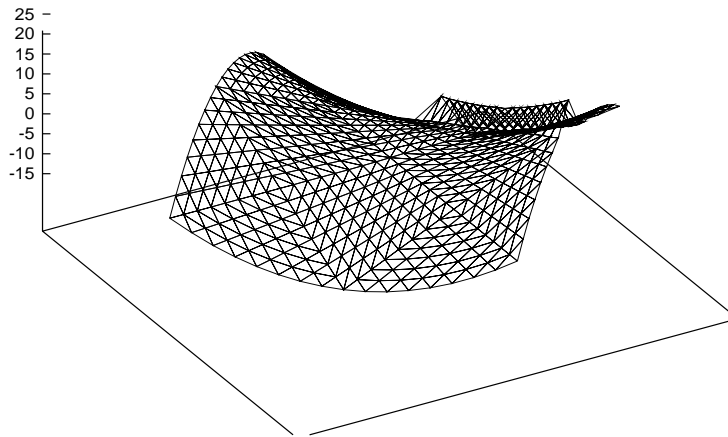


FIG. 4.3 – Visualisation de la déformée de la coque dans le cas où les trois-quarts de la frontière est encastree.

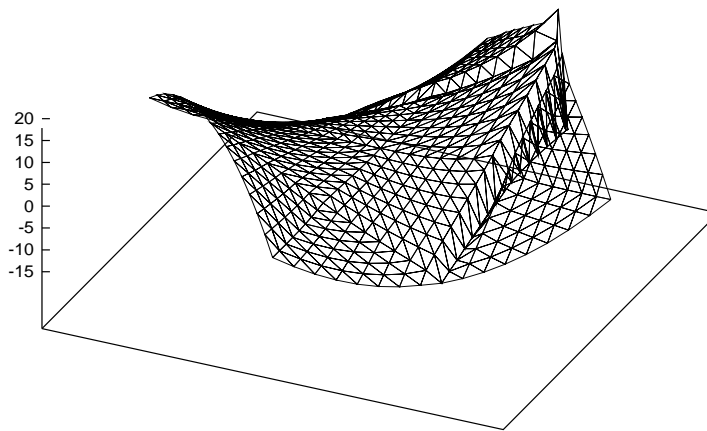


FIG. 4.4 – Visualisation de la déformée de la coque dans le cas où les trois-quarts de la frontière est encastree.

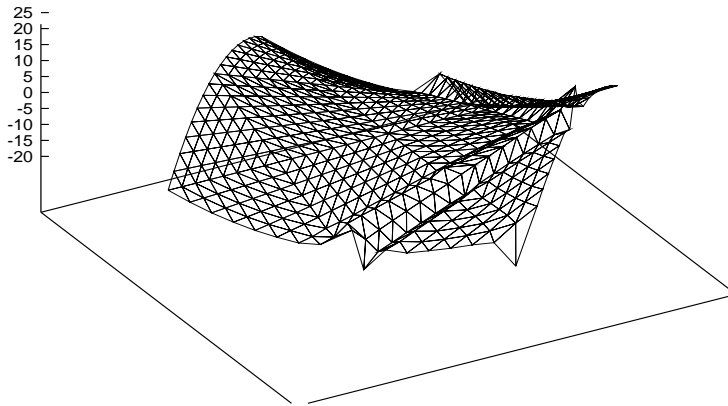


FIG. 4.5 – Surface déformée. Encastrée aux trois-quarts et sur le quart restant de la frontière on a une relation de la forme $u_1 + u_2 = 1$.

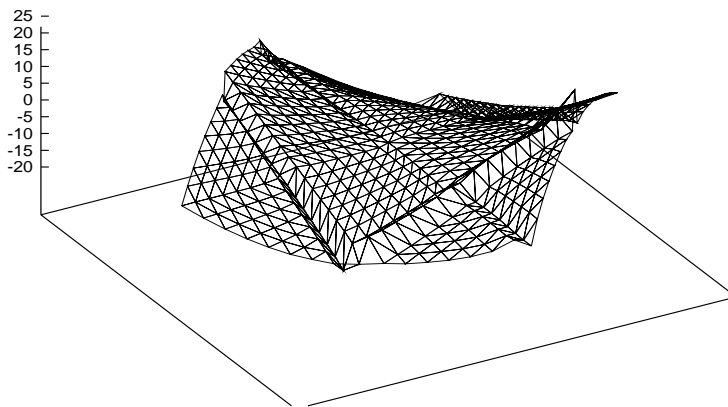


FIG. 4.6 – Surface déformée. À moitié encastrée et sur le quart supérieur et inférieur on a les relations $u_1 + u_2 = 1$, $u_1 + u_2 = 2$.

Exemple 4.1.3

Dans cette exemple nous allons traiter le cas hyperbolique pour un domaine de référence :

$$(4.4) \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < r, 0 < y < r, x + y \leq r, \forall r > 0\}$$

nous considérons la paramétrisation suivante :

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \Psi : \Omega &\longrightarrow S \subset \mathcal{E} \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, xy) \end{aligned}$$

La surface présente donc trois frontières physiques que nous désignerons par $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$, chaque frontière pouvant être paramétrisée à l'aide des applications que nous noterons encore $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ définies respectivement par :

$$(4.6) \quad \Sigma_i = \{(x, y) \mid y = \phi_i(x)\}, i \in [1..3]$$

où ϕ_i est définie sur $[0, r]$ à valeurs dans $[0, r]$. (cf. figure 4.7 page 118)

Avec le choix (4.5 page 117) de la paramétrisation on a Γ_{12}^1 et Γ_{12}^2 différents de zéro, les autres $\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}$ nuls, $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} \neq 0$ alors $-2b_{12}T^{12} = f^3$ entraîne que $T^{12} = \frac{f^3}{-2b_{12}}$ et les équations membranaires peuvent être écrites sous la forme :

$$(4.7) \quad \begin{cases} \partial_1 T^{11} + \Gamma_{12}^2 T^{11} = F^1, \\ \partial_2 T^{22} + \Gamma_{12}^1 T^{22} = F^2, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(4.8) \quad \begin{cases} F^1 = -f^1 + \partial_2 \left(\frac{f^3}{2b_{12}} \right) + \frac{3\Gamma_{12}^1}{2b_{12}} f^3, \\ F^2 = -f^2 + \partial_1 \left(\frac{f^3}{2b_{12}} \right) + \frac{3\Gamma_{12}^2}{2b_{12}} f^3. \end{cases}$$

alors de la relation $T^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\vec{u})$ nous tirons

$$(4.9) \quad \begin{cases} \partial_1 u_1 = B_{1111} T^{11} + B_{1122} T^{22} + 2B_{1112} T^{12}, \\ \partial_2 u_2 = B_{2211} T^{11} + B_{2222} T^{22} + 2B_{2212} T^{12}, \end{cases}$$

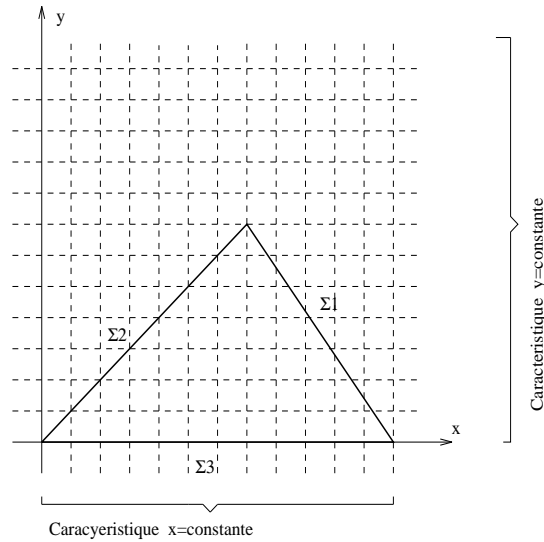


FIG. 4.7 – Visualisation du domaine de référence ainsi que des frontières.

Les $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sont les coefficients de souplesse et les $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ sont les symboles de Christoffel. Nous allons simplifier les équations, ce qui, comme nous le verrons, n'est pas restrictif. Une des hypothèses simplificatrices consiste à se donner un champ de forces identiquement nul.

En ce qui concerne les conditions aux limites, compte tenu du choix du domaine, elles sont :

$$(4.10) \quad \begin{cases} T^{11} = 0 \text{ et } T^{22} = 0 \text{ sur } \Sigma_1. \\ (u_1, u_2) = \vec{U}_o \text{ sur } \Sigma_2 \cup \Sigma_3. \end{cases}$$

nous imposons au vecteur \vec{U}_o d'être une distribution, par exemple :

$$(4.11) \quad \vec{U}_o = H(y) = \begin{cases} \alpha \text{ si } y > y_0, \\ -\alpha \text{ si } y < y_0, \end{cases}$$

Par ailleurs, sur la frontière Σ_1 nous imposons comme condition aux limites $T^{\alpha\beta}n_{\beta}|_{\Sigma_1} = 0$. Ainsi on se ramène à résoudre le système (4.12 page 119) totalement découplé.

$$(4.12) \quad \begin{cases} \partial_1 T^{11} + \Gamma_{12}^2 T^{11} = 0, \\ \partial_2 T^{22} + \Gamma_{12}^1 T^{22} = 0, \\ T^{11} = 0 \text{ et } T^{22} = 0 \text{ sur } \Sigma_1. \end{cases}$$

Il est clair qu'il s'agit de deux équations différentielles du premier ordre à variables séparées, donc intégrables. L'unique couple solution est alors, compte tenu des conditions aux limites la solution nulle. À présent nous sommes en mesure de résoudre le second système hyperbolique (4.13 page 119) qui, dans ce cas, se réduit à :

$$(4.13) \quad \begin{cases} \partial_1 u_1 = 0, \\ \partial_2 u_2 = 0, \\ u_1 = U_1^o \text{ sur } \Sigma_2 \text{ et } u_2 = U_2^o \text{ sur } \Sigma_3. \end{cases}$$

La solution de ce système hyperbolique est \vec{U}^o que nous avons choisie être une distribution. Nous voyons donc que la discontinuité introduite par \vec{U}^o ne s'est pas réfléchiée dans une autre direction caractéristique par conséquent il n'y a pas de réflexion. L'intérêt de cet exemple est de montrer qu'il est facile d'introduire des discontinuités à partir des conditions aux limites. Par ailleurs, nous remarquons que ce choix de conditions aux limites est licite pour les coques.

Exemple 4.1.4

Dans l'exemple qui suit, nous allons modifier la nature des conditions aux limites du système (4.13 page 119). Nous décidons d'imposer sur Σ_2 une relation affine entre les inconnues u_1 et u_2 , par exemple $u_1 + 2u_2 = 0$. Ceci est licite puisque la frontière Σ_2 n'est pas caractéristique. L'application bijective paramétrisant cette frontière est donnée par $\Sigma_2 = \{(x, y) | y = ax\}$. On impose sur Σ_3 une relation de la forme :

$$(4.14) \quad u_2 = H(x - x_0)$$

La résolution du système (4.12 page 119) conduit encore à la solution identiquement nulle pour T^{11} , T^{22} et celle du système (4.13 page 119) donne comme solution du champ de déplacements :

$$(4.15) \quad \begin{cases} u_1 = H\left(\frac{y - y_0}{a}\right), \\ u_2 = H(x - x_0). \end{cases}$$

Ceci conduit alors à la création d'une discontinuité qui se propage le long des caractéristiques $y=cste$ (cf. figure 4.8 page 120). Ceci veut donc dire que si une des conditions aux limites présente une singularité, avec des conditions aux limites particulières, sur les autres frontières on peut générer de nouvelles discontinuités.

Dans le premier exemple, il est clair que le fait d'imposer des conditions aux limites non régulières n'entraîne pas la génération de nouvelles discontinuités. Par contre dans le second exemple, le fait d'imposer des relations affines sur des portions de frontière non caractéristiques conduit à des "réflexions" des singularités.

Cependant, il est à noter que x_0 doit être choisi convenablement. En effet, si la droite d'équation $x = x_0$ ne coupe pas la frontière Σ_2 la conclusion est différente (cf. figure 4.8 page 120).

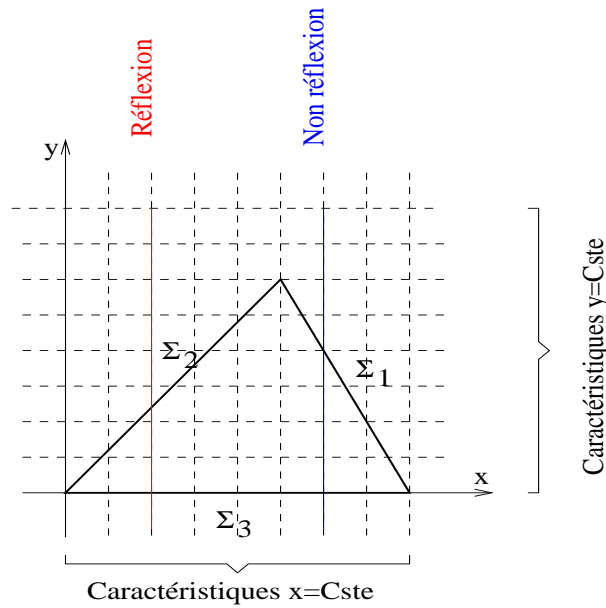


FIG. 4.8 – Visualisation des discontinuités.

Tous ces exemples ont été présentés pour montrer qu'il n'est pas facile d'interpréter ces phénomènes qui dans certains cas rappellent étrangement la réflexion des singularités. Dans la suite de ce chapitre nous allons éclaircir ces points et donner une interprétation aux exemples introductifs qui précèdent.

4.2 Système d'équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques du premier ordre. Problème de Cauchy

Dans cette partie nous nous intéressons aux systèmes hyperboliques du premier ordre à 2 équations et 2 inconnues (cf. [9], [14], [42]). Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 paramétré par $y=(y^1, y^2)$. On désigne par $U=(u_1, u_2)$ une fonction définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^2 et nous posons :

$$(4.16) \quad u_{,l}(y) = \partial_l u(y) = \frac{\partial u(y)}{\partial y_l},$$

$$(4.17) \quad D = (\partial_1, \partial_2).$$

Considérons un système aux dérivées partielles du premier ordre à 2 équations et 2 inconnues que l'on note encore par $P(y, D)$.

$$(4.18) \quad P(y, D)U = \sum_{k=1}^2 A_k(y) \partial_k U(y) + C(y)U(y) = F(y)$$

où $F(y)=(f^1(y), f^2(y))$ est une fonction définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Les $A_k(y)$ et $C(y)$ sont deux matrices carrées dont les éléments sont des fonctions continues, bornées, définies sur \mathbb{R}^2 .

Les données de Cauchy concernent naturellement les 2 inconnues puisque le système est du premier ordre. Par suite, nous désignerons par conditions aux limites les données de Cauchy. On suppose que la frontière Σ est la réunion finie de courbes non caractéristiques, alors on peut imposer sur Σ des conditions aux limites quelconques que nous noterons encore par :

$$(4.19) \quad \mathcal{B}U = G \text{ sur } \Sigma$$

où $G=(g_1, g_2)$ est une fonction définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R} .

Précisons la notation $\mathcal{B}U = G$ sur Σ . Supposons que $\Sigma = \cup_{l=1}^2 \Sigma_l$, c'est-à-dire que Σ est réunion de deux courbes non caractéristiques. Chaque courbe Σ_l est définie de manière implicite par une fonction ϕ^l de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$:

$$(4.20) \quad \Sigma_l = \{y = (y^1, y^2) | \phi^l(y^1, y^2) = 0\}$$

Alors la notation $\mathcal{B}U = G$ sur Σ traduit une des relations affines entre les inconnues et les données de Cauchy sur Σ du type :

$$(4.21) \quad \begin{cases} B^1_1 u_1 + B^2_1 u_2 = g_1 \text{ sur } \Sigma_1 \\ u_2 = g_2 \text{ sur } \Sigma_2. \end{cases}$$

4.2.1 Cas d'un système hyperbolique

Nous considérons l'opérateur différentiel du premier ordre \mathbf{P} comme précédemment mais en prenant, sans perte de généralité pour la suite, les matrices particulières suivantes :

$$(4.22) \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^2_{11} \\ \Gamma^1_{22} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix}.$$

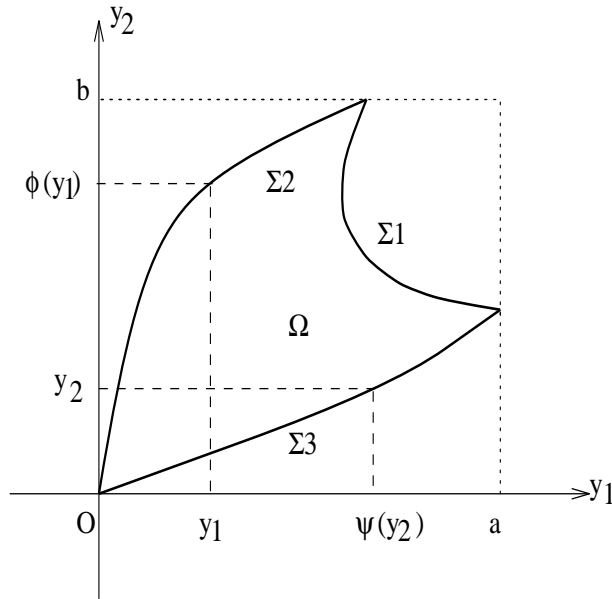
où les coefficients $\Gamma_{\lambda\lambda}^\alpha$ sont des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$. Ainsi le système différentiel linéaire du premier ordre est :

$$(4.23) \quad \begin{cases} \partial_1 u_1 = \Gamma^1_{11} u_1 + f_1 \\ \partial_2 u_2 = \Gamma^2_{22} u_2 + f_2. \end{cases}$$

Le système différentiel (4.23 page 122) est strictement hyperbolique et ses courbes caractéristiques sont les courbes d'équations $y^\alpha = \text{constante}$, pour $\alpha \in [1..2]$. La justification de l'étude des systèmes strictement hyperboliques est lié à la nature des équations membranaires. Les systèmes différentiels linéaires du premier ordre strictement hyperboliques peuvent toujours se ramener (par un changement de variable convenable) à la forme (4.23) dite forme diagonale.

Nous allons considérer à présent les problèmes de Cauchy pour le système (4.23 page 122). On se donne trois courbes transversales aux caractéristiques notées Σ_1, Σ_2 et Σ_3 qui se coupent deux à deux (cf. figure 4.2.1 page 123).

Les systèmes (4.7 page 117) et (4.9 page 117) sont des systèmes différentiels du premier ordre strictement hyperboliques. L'étude des réflexions se rapporte donc au système (4.23 page 122) auquel on adjoint les conditions aux limites (4.21 page 122).



Théorème 4.2.1 Soit $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ un domaine de \mathbb{R}^2 de frontière $\partial\Omega$ régulière. Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ trois courbes régulières de Ω données par :

$$(4.24) \quad \begin{cases} \Sigma_1 = \{(y^1, y^2) \mid y^2 = \phi(y^1)\}, \\ \Sigma_2 = \{(y^1, y^2) \mid y^1 = \psi(y^2)\}, \\ \Sigma_3 = \partial\Omega \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2). \end{cases}$$

où ϕ , (resp. ψ) sont des fonctions bijectives sur $[0, a]$ (resp. $[0, b]$) à valeur dans $[0, b]$ (resp. $[0, a]$) de classe C^1 . Pour toutes données $F = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $G = (g_1, g_2) \in L^2([0, a]) \times L^2([0, b])$, il existe une unique fonction $U = (u_1, u_2)$ de $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ solution du système différentiel hyperbolique (4.23 page 122) :

et satisfaisant aux données :

$$(4.25) \quad \begin{cases} B^1_1 u_1 + B^2_1 u_2 = g_1 \text{ sur } \Sigma_1 \\ u_2 = g_2 \text{ sur } \Sigma_2. \end{cases}$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (4.24 page 123) avec données de Cauchy sur des courbes transversales aux caractéristiques sont classiques. Les démonstrations usuelles consistent à faire des approximations successives de type Picard, voir [9]. Par une démonstration analogue, nous tirons une autre variante où, au lieu de considérer les données de Cauchy sur une seule courbe, nous envisageons des don-

nées de Cauchy sur des courbes $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$, avec des conditions en relations affines très générales (cf. 4.25 page 123).

Démonstration du théorème :

Considérons dans un premier temps l'opérateur \mathbf{T} définie pour toutes fonctions continues $U=(u_1, u_2)$ sur Ω par :

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} : \mathcal{C}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{C}(\Omega) \\ U &\longmapsto V = \mathbf{T}(U) \end{aligned}$$

avec :

$$(4.27) \quad \begin{cases} v_1(y^1, y^2) = -B_1^2 v_2(\psi(y^2), y^2) + \int_{\psi(y^2)}^{y^1} \Gamma_{11}^\lambda u_\lambda(s, y^2) ds, \\ v_2(y^1, y^2) = \int_{\phi(y^1)}^{y^2} \Gamma_{22}^\lambda u_\lambda(y^1, t) dt. \end{cases}$$

Dans un premier temps, nous allons montrer que l'opérateur intégrale se prolonge par continuité en un opérateur défini de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Puisque par hypothèse $U=(u_1, u_2)$ appartient à $\mathcal{C}(\Omega)$ alors une majoration en norme $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne le résultat recherché. Il reste néanmoins le problème des traces des fonctions $V=(v_1, v_2)$ que nous allons lever pour justifier la majoration suivante :

$$(4.28) \quad \begin{cases} |\mathbf{T}U|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq M|U|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \\ \text{avec } M = \sup\{a, b\} \end{cases}$$

Les courbes sur lesquelles sont prescrites les données de Cauchy sont décrites par des difféomorphismes $y^2 = \phi(y^1)$ et $y^1 = \psi(y^2)$ de classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ de $[0, a]$ (resp. $[0, b]$) à valeurs dans $[0, b]$ (resp. $[0, a]$).

Introduisons l'espace W définie comme suit :

$$(4.29) \quad W = \{V = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), (\partial_1 v_1, \partial_2 v_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)\}$$

ainsi W est un espace de Hilbert muni de la norme suivante :

$$(4.30) \quad \|V\|_W = |V|_{L^2(\Omega)} + |\partial_1 v_1|_{L^2(\Omega)} + |\partial_2 v_2|_{L^2(\Omega)}$$

Calculons la norme des traces de v_1 et v_2 .

$$(4.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} |v_1|_{L^2(\Sigma_1)}^2 = \int_0^b |v_1(\psi(y^2), y^2)|^2 dy^2 = \\ \int_0^a |v_1(y^1, \psi^{-1}(y^1))|^2 |\psi'(y^1)|^{-2} dy^1, \\ |v_1|_{L^2(\Sigma_2)}^2 = \int_0^a |v_2(y^1, \phi(y^1))|^2 dy^1 = \\ \int_0^b |v_2(\phi^{-1}(y^2), y^2)|^2 |\phi'(y^2)|^{-2} dy^2. \end{array} \right.$$

Par ailleurs nous avons les relations suivantes :

$$(4.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1(\psi(y^2), y^2) = v_1(y^1, y^2) - \int_{\psi(y^2)}^{y^1} \partial_1 v_1(t, y^2) dt, \\ v_2(y^1, \phi(y^1)) = v_2(y^1, y^2) - \int_{\phi(y^1)}^{y^2} \partial_2 v_2(y^1, s) ds. \end{array} \right.$$

En injectant $v_1(\psi(y^2), y^2)$ et $v_2(y^1, \phi(y^1))$ issues de la relation (4.32 page 125) dans la relation (4.31 page 125) et en prenant la norme $L^2(\Omega)$ nous obtenons en posant $\Delta = [0, a] \times [0, b]$ et $dy = dy^1 dy^2$:

$$(4.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Delta} |v_1(\psi(y^2), y^2)|^2 dy = \int_{\Delta} |v_1(y^1, y^2) - \int_{\psi(y^2)}^{y^1} \partial_1 v_1(t, y^2) dt|^2 dy, \\ \int_{\Delta} |v_2(y^1, \phi(y^1))|^2 dy = \int_{\Delta} |v_2(y^1, y^2) - \int_{\phi(y^1)}^{y^2} \partial_2 v_2(y^1, s) ds|^2 dy. \end{array} \right.$$

d'où l'on tire les inégalités :

$$(4.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \int_0^b |v_1(\psi(y^2), y^2)|^2 dy^2 \leq |\psi'|^{-1} [|v_1|_{L^2(\Omega)} + a |\partial_1 v_1|_{L^2(\Omega)}], \\ b \int_0^a |v_2(y^1, \phi(y^1), y^2)|^2 dy^1 \leq |\phi'|^{-1} [|v_2|_{L^2(\Omega)} + b |\partial_2 v_2|_{L^2(\Omega)}]. \end{array} \right.$$

ce qui assure l'existence des traces pour chacune des fonctions $V=(v_1, v_2)$ sur les courbes respectives Σ_1 et Σ_2 puisque nous venons de montrer que

$$(4.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} |trace(v_1); \Sigma_1| \leq M \|V\|_W, \\ |trace(v_2); \Sigma_2| \leq M \|V\|_W. \end{array} \right.$$

Par ailleurs, nous avons les relation suivantes :

$$(4.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_1 v_1 = \Gamma_{11}^1 v_1 + \Gamma_{11}^2 v_2, \\ \partial_1 v_1 = \Gamma_{22}^1 v_1 + \Gamma_{22}^2 v_2, \end{array} \right.$$

ce qui nous permet de majorer les quantités suivantes :

$$(4.37) \quad \begin{cases} |\partial_1 v_1|_{L^2(\Omega)} \leq \max(\sup |\Gamma_{11}^1|, \sup |\Gamma_{11}^2|) [|v_1|_{L^2(\Omega)} + |v_2|_{L^2(\Omega)}], \\ |\partial_2 v_2|_{L^2(\Omega)} \leq \max(\sup |\Gamma_{11}^1|, \sup |\Gamma_{11}^2|) [|v_1|_{L^2(\Omega)} + |v_2|_{L^2(\Omega)}]. \end{cases}$$

Ce qui conduit à

$$(4.38) \quad \begin{cases} |\text{trace}(v_1); \Sigma_1| \leq M |V|_{L^2(\Omega)}, \\ |\text{trace}(v_2); \Sigma_2| \leq M |V|_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$$

on retrouve ainsi la majoration donnée par (4.28 page 124) à savoir :

$$|\mathbf{T}V|_{L^2(\Omega)} \leq M |V|_{L^2(\Omega)}$$

Il est clair que toute solution à notre problème est un point fixe de l'opérateur \mathbf{T} . Nous allons démontrer que l'opérateur \mathbf{T} admet un unique point fixe pour prouver le théorème.

On considère l'opérateur \mathbf{T} défini par :

$$(4.39) \quad \begin{cases} v_1(y^1, y^2) = g_1(\psi(y^2), y^2) - B_1^2 v_2(\psi(y^2), y^2) \\ \quad + \int_{\psi(y^2)}^{y^1} [\Gamma_{11}^\lambda u_\lambda(s, y^2) + f_1(s, y^2)] ds, \\ v_2(y^1, y^2) = g_2(y^1, \phi(y^1)) \\ \quad + \int_{\phi(y^1)}^{y^2} [\Gamma_{22}^\lambda u_\lambda(y^1, t) + f_2(y^1, t)] dt, \end{cases}$$

Soient $\bar{U}=(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ et $\tilde{U}=(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ deux solutions du problème (4.27 page 124) et satisfaisant aux conditions aux limites. Posons $U=(u_1, u_2) = (\bar{u}_1 - \tilde{u}_1, \bar{u}_2 - \tilde{u}_2)$, par linéarité de l'opérateur \mathbf{T} on a : $V=TU=T\bar{U} - T\tilde{U}$ soit encore en passant aux normes et en utilisant les résultats sur l'existence des traces nous avons :

$$(4.40) \quad \begin{cases} |v_1|_{L^2(\Omega)}^2 \leq M_1 [|u_1|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_2|_{L^2(\Omega)}^2] + \int_{\Delta} |B_1^2 v_2(\psi(y^2), y^2)|^2 dy^1 dy^2, \\ |v_2|_{L^2(\Omega)}^2 \leq M_2 [|u_1|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_2|_{L^2(\Omega)}^2], \end{cases}$$

Or nous savons que

$$(4.41) \quad b \int_0^a |v_2(y^1, \phi(y^1))|^2 dy^1 \leq |\psi'|^{-1} [|v_2|_{L^2(\Omega)} + b |\partial_2 v_2|_{L^2(\Omega)}]$$

donc en posant $dy = dy^1 dy^2$ nous obtenons

$$(4.42) \quad \int_{\Delta} |B_1^2 v_2(\psi(y^2), y^2)|^2 dy \leq a \sup |B_1^2| \sup |\psi'|^{-1} [|v_2|_{L^2(\Omega)} + a |\partial_2 v_2|_{L^2(\Omega)}]$$

Par ailleurs, en exploitant la relation suivante

$$(4.43) \quad |\partial_2 v_2|_{L^2(\Omega)} \leq \max(\sup |\Gamma_{11}^1|, \sup |\Gamma_{11}^2|) [|u_1|_{L^2(\Omega)} + |u_2|_{L^2(\Omega)}]$$

nous obtenons

$$|TU|_{L^2(\Omega)} \leq M \sup(a, b) |U|_{L^2(\Omega)} \text{ avec } M = \max(\sup |\Gamma_{11}^1|, \sup |\Gamma_{11}^2|)$$

L'opérateur \mathbf{T} est donc lipchitzien de constante $K = M \sup(a, b)$, par conséquent pour (a, b) suffisamment petit, la constante K est inférieure à 1. L'opérateur \mathbf{T} devenant contractant, possède alors un unique point fixe en vertu du lemme du point fixe. La constante K ne dépendant que du domaine Ω , le théorème est démontré de proche en proche.

Remarque 4.2.1 *Il est facile en reprenant exactement les différentes étapes de la démonstration, de montrer l'existence et l'unicité du problème de Cauchy pour un système hyperbolique dont les conditions aux limites ne sont pas du type (4.25 page 123). Le problème d'existence des traces étant réglé. (cf. [4, p.552-554])*

Il est clair que la régularité des solutions d'un problème de Cauchy pour un système hyperbolique dépend essentiellement de la régularité des données de Cauchy; c'est le phénomène de "propagation des singularités" propres aux systèmes hyperboliques.

Ce théorème nous permet d'assurer l'existence et l'unicité des solutions pour un type particulier de conditions aux limites chaque fois que les données jouissent d'une certaine régularité.

4.3 Réflexion dans les systèmes hyperboliques

Soit Ω un domaine ouvert de \mathbb{R}^2 et S une surface régulière de classe \mathcal{C}^2 de \mathcal{E} , paramétrisée par une carte locale $(\Omega, \vec{\Phi})$. On considère une coque élastique d'épaisseur relative ϵ , de surface moyenne uniformément hyperbolique. Nous choisissons les lignes asymptotiques comme lignes coordonnées. Les coefficients de la deuxième forme fondamentale sont $b_{11} = b_{22} = 0, b_{12} \neq 0$. Après élimination de T^{12} les équations prennent la forme :

$$(4.44) \quad \begin{cases} \partial_1 T^{11} + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2)T^{11} + \Gamma_{22}^1 T^{22} = F^1, & (1) \\ \partial_2 T^{22} + (2\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1)T^{22} + \Gamma_{11}^2 T^{11} = F^2, & (2) \\ T^{11} n_1 = \frac{f^3}{2b_{12}} n_2 \text{ sur une partie } \Sigma_1 \text{ du bord } \Sigma, & (3) \\ T^{22} n_2 = \frac{f^3}{2b_{12}} n_1 \text{ sur } \Sigma_1. & (4) \end{cases}$$

De même, après élimination de u_3 on obtient :

$$(4.45) \quad \begin{cases} \partial_1 u_1 - \Gamma_{11}^1 u_1 - \Gamma_{11}^2 u_2 = B_{11\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, & (1) \\ \partial_2 u_2 - \Gamma_{22}^1 u_1 - \Gamma_{22}^2 u_2 = B_{22\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, & (2) \\ \mathcal{B}(u_1, u_2) = (g^1, g^2) \text{ sur } \Sigma_2, \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2. & (3) \end{cases}$$

où les $\Gamma_{\beta\delta}^\alpha$ sont les symboles de Christoffel et les $B_{\alpha\beta\delta\nu}$ sont les coefficients de souplesse.

Dans le premier système les conditions aux limites sont fixées par la nature du problème alors que pour le second système il y a possibilité d'imposer des conditions aux limites assez générales.

Dans cette section, nous nous attachons à l'étude de deux types de surfaces hyperboliques. Le premier étant constitué des surfaces pour lesquelles les Γ_{22}^1 et Γ_{11}^2 sont identiquement nuls (par exemple $\vec{\Phi}(x, y) = (a(x), b(y), a(x)b(y))$), le second par les surfaces réglées non développables pour lesquelles au moins un des deux symboles Γ_{22}^1 ou Γ_{11}^2 est nul. Le problème se pose alors en ces termes : étant donné une singularité des données (forces données discontinues le long d'une caractéristique) nous étudions le phénomène de réflexion sur les frontières où, bien entendu, sont prescrites des conditions aux limites. Comme on le sait (voir[16]) la singularité des données se reporte sur les inconnues.

Définition 4.3.1 *Considérons les systèmes différentiels avec données de Cauchy sur des courbes non caractéristiques. Nous dirons que :*

1. il y a une réflexion si la singularité d'une des inconnues se reporte par l'intermédiaire des conditions aux limites aux autres inconnues.
2. il y a une pseudo réflexion si la singularité d'une des inconnues se transporte par couplage des inconnues et des équations aux autres inconnues.

Nous allons énoncer le théorème principal de cette section.

Théorème 4.3.1 Soient par a, b deux réels strictement positifs et désignons par $\Omega =]0, a[\times]0, b[$ un ouvert connexe de \mathbb{R}^2 . Soit Σ la réunion de deux courbes Σ_1 et Σ_2 non caractéristiques et non parallèles entre elles, définies respectivement par $\Sigma_1 = \{(x, y)/y = \phi(x)\}$, $\Sigma_2 = \{(x, y)/x = \psi(y)\}$ où ϕ (resp. ψ) est définie sur $]0, a[$ (resp. $]0, b[$) à valeurs dans $]0, b[$ (resp. $]0, a[$). Étant données $\vec{f} \in (\hat{V}^o)' \times H^1(\Omega)$ et $\vec{g} \in L^2(\Omega)$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

Soit $\Xi(f^1)$ (resp. $\Xi(f^2)$) la courbe portant la singularité de f^1 (resp. f^2). Supposons que $\Xi(f^1) \cap \Sigma \neq \emptyset$ (resp. $\Xi(f^2) \cap \Sigma \neq \emptyset$) et qu'au point d'intersection (x_0, y_0) on ait $f^1(x_0, y_0) \neq 0$ (resp. $f^2(x_0, y_0) \neq 0$) alors il n'y a pas de réflexion de la singularité pour T^{22} (resp. T^{11}) aux sens de la définition 1. Le couplage introduit par $B_{\alpha\beta\lambda\nu}$ transporte la singularité sur u_1 et u_2 d'où pseudo réflexion. De plus il existe une relation entre le saut $[[u_1]]$ de u_1 et celui de T^{11} (resp. entre $[[u_2]]$ et $[[T^{22}]]$).

Preuve :

Puisqu'on envisage le cas des surfaces hyperboliques réglées non développables, Γ_{22}^1 ou Γ_{11}^2 sont identiquement nuls. Si on choisit $\Gamma_{22}^1 = 0$ l'équation (4.44(1)) est hyperbolique en x alors, d'après le théorème de L. Hörmander [16] les singularités se propagent dans la direction $y=cte$. Puisque $\Xi(f^1) \cap \Sigma \neq \emptyset$ et comme le point de coordonnées $(x_0, y_0) \in \Xi(T^{11}n_2)$ sur Σ_1 d'après le théorème de L. Nirenberg [33] et de M. Taylor [42] concernant les équations hyperboliques, (x_0, y_0) appartient au support des singularités de (T^{11}) .

Le couplage dans l'équation (4.44(2)) introduit les singularités de l'inconnue T^{11} . Il est clair qu'il n'y a pas eu de réflexion mais un transport de la singularité par couplage des inconnues. En ce qui concerne le système (4.45(1))-(4.45(3)) les singularités sont introduites par les $B_{\alpha\beta\lambda\mu}T^{\lambda\mu}$, c'est-à-dire par couplage avec le système (4.44(1)),(4.44(2)). L'équation (4.45(2)) ne fait pas intervenir u_1 on se retrouve dans la situation précédente, mais, cette fois, la propagation de la singularité a lieu le long de $x=cte$. Un raisonnement analogue au précédent permet de conclure qu'il n'y a pas de réflexion pour les conditions aux limites utilisées. S'il existe une relation entre $[[u_1]]$ et $[[T^{11}]]$, elle est de la forme $[[u_1]] = K(x)[[T^{11}]]$ puisque $[[T^{22}]] = 0$ le long de $y=cte$. Montrons que $K(x)$ satisfait à une équation différentielle du premier ordre. Partant de l'équation (4.45(1)), le long de la discontinuité $y = y_0$ la formule des sauts donne :

$$(4.46) \quad \frac{d[[u_1]]}{dx}(x) - \Gamma_{11}^1[[u_1]](x) = B_{1111}[[T^{11}]](x)$$

où $[[u_1]] = K(x)[[T^{11}]]$, alors (4.45(1)) donne, puisque $[[T^{11}]] \neq 0$,

$$(4.47) \quad \frac{dK}{dx}(x) + (-\Gamma_{11}^1 + \frac{d}{dx}Ln([[T^{11}]])K(x) = B_{1111}(x)$$

d'où la relation linéaire recherchée.

Corollaire 4.3.2 *Dans le cadre des hypothèses du théorème 4.3.1 (cf. page 129) pour des surfaces hyperboliques dont les coefficients Γ_{22}^1 et Γ_{11}^2 sont simultanément nuls, il n'y a pas réflexion mais pseudo réflexion.*

Nous énonçons un second théorème qui concerne les systèmes hyperboliques pour des conditions aux limites particulières. Il ne s'agit que d'une étude purement mathématique. Comme nous le verrons, ce théorème n'est pas applicable au système membranaire puisque on ne peut imposer ces conditions aux limites particulières aux coques.

Théorème 4.3.3 *On conserve les hypothèses du théorème 4.3.1 (cf. page 129), on suppose que les données $\vec{f} \in (\hat{V}^o)' \times H^1(\Omega)$ sont régulières mais on n'impose aucune régularité sur les données \vec{g} .*

Soit $\Xi(g^1)$ (resp. $\Xi(g^2)$) la courbe portant la singularité de g^1 (resp. g^2). Supposons que $\Xi(g^1) \cap \Sigma \neq \emptyset$ (resp. $\Xi(g^2) \cap \Sigma \neq \emptyset$) et qu'au point d'intersection (x_0, y_0) on ait $g^1(x_0, y_0) \neq 0$ (resp. $g^2(x_0, y_0) \neq 0$) alors il y a réflexion de la singularité pour u_2 (resp. u_1) au sens du point 1 de la définition 4.3.1 (cf. page 128) dès que l'on se donnera des conditions aux limites dont le couple (u_1, u_2) solution n'est ni à trace nulle sur les frontières ni dans le noyau de \mathcal{B}

$$(4.48) \quad \mathcal{B} \begin{cases} u_1 = g_1 \text{ sur } \Sigma_1, \\ u_1 + B^2_1 u_2 = g_2 \text{ sur } \Sigma_2. \end{cases}$$

Le couplage introduit par la relation linéaire transporte la singularité de u_1 sur u_2 d'où réflexion. De plus il existe une relation entre le saut $[[u_1]]$ de u_1 et le saut $[[u_2]]$ de u_2 lors de la réflexion.

Remarque 4.3.1 Il est à noter que ce théorème ne concerne que le deuxième système hyperbolique (4.45 page 128) du problème membranaire. En effet, comme on peut jouer sur les conditions aux limites il diffère en cela du premier système.

Preuve :

Supposons dans un premier temps que toutes les données à savoir \vec{f} et \vec{g} sont régulières, c'est-à-dire que $\Xi(\vec{f}) = \emptyset$ respectivement $\Xi(\vec{g}) = \emptyset$, alors d'après le théorème 4.2.1 (cf. page 122) la solution du système hyperbolique (4.45 page 128) la solution existe et est unique et de surcroît régulière.

Supposons à présent que les données \vec{f} soit régulières alors que les données \vec{g} sont telles que $\Xi(\vec{g}) \neq \emptyset$. Trois cas de figure sont alors à considérer.

1. Supposons que $\Xi(g^1) \neq \emptyset$ alors la discontinuité de u_1 affecte la deuxième équation du système des conditions aux limites (cf. 4.48 page 131) car il y a une combinaison des inconnues u_1 et u_2 ce qui entraîne la réflexion au sens du point 1 de la définition 4.3.1 (cf. page 128). En revanche ce ne sera pas le cas si $\Xi(g^1) = \emptyset$.
2. Supposons maintenant que $\Xi(g^2) \neq \emptyset$ alors la discontinuité agit sur u_2 mais n'affecte pas l'inconnue u_1 de la deuxième équation du système des conditions aux limites (cf. 4.48 page 131) car le support des singularités est porté par les caractéristiques. Le support de la discontinuité de g^2 n'est pas une caractéristique de l'inconnue u_1 par conséquent il n'y a pas de réflexion.
3. Supposons que $\Xi(g^1) \neq \emptyset$ et $\Xi(g^2) \neq \emptyset$. On suppose qu'il existe un couple (u_1, u_2) solution du système (4.45 page 128) satisfaisant au système de conditions aux limites (4.48 page 131), alors le couple (u_1, u_2) est un élément du noyau de l'opérateur frontière \mathcal{B} . La conséquence est l'absence de réflexion au sens de la définition 4.3.1 (cf. page :4.3.1).

Montrons à présent qu'il existe une relation entre le saut $[[u_1]]$ de u_1 et le saut $[[u_2]]$ de u_2 lors de la réflexion. Soit Σ une frontière non caractéristique sur laquelle est prescrite la relation affine $u_1 + B^2_1 u_2 = g_2$ sur Σ . On considère le cas où $\Xi(g^1) \neq \emptyset$. Alors la discontinuité est portée par l'inconnue u_1 sur la caractéristique d'équation $y = cste$, c'est-à-dire $[[u_1]] \neq 0$. Posons $\tilde{u}_i = \frac{1}{2}(u_i^+ + u_i^-)$ alors nous avons :

$$(4.49) \quad \begin{cases} u_i^+ = \tilde{u}_i + \frac{1}{2}[[u_i]] \\ u_i^- = \tilde{u}_i - \frac{1}{2}[[u_i]] \end{cases}$$

On réécrit la relation linéaire $u_1 + B^2_1 u_2 = g_2$ sur Σ aux points A et B (cf. figure 4.9 page 133).

$$(4.50) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_1 - \frac{1}{2}[[u_1]] + B^2_1(\tilde{u}_2 + \frac{1}{2}[[u_2]]) &= g_2^+ \text{ au point A} \\ \tilde{u}_1 + \frac{1}{2}[[u_1]] + B^2_1(\tilde{u}_2 - \frac{1}{2}[[u_2]]) &= g_2^- \text{ au point B} \end{aligned}$$

En faisant la différence nous obtenons la relation entre $[[u_1]]$ et $[[u_2]]$:

$$(4.51) \quad [[u_1]] - B^2_1[[u_2]] = [[g_2]].$$

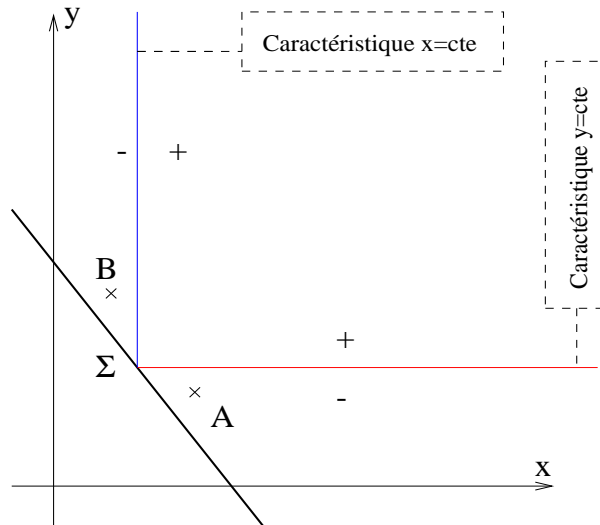


FIG. 4.9 – Réflexion des caractéristiques sur une frontière où est prescrite une relation linéaire.

Si $[[g_2]]$ est nulle, c'est-à-dire $\Xi(g^2) = \emptyset$, alors la relation est de la forme :

$$(4.52) \quad [[u_1]] - B^2_1[[u_2]] = 0.$$

Remarque 4.3.2 *L'hypothèse selon laquelle on doit supposer que le couple de solution (u_1, u_2) n'est pas à trace nulle est liée au fait que si c'était le cas alors leurs sauts, qui sont identiquement nuls à la traversée des frontières, satisfont de facto la relation (4.52 page 133), donc ils sont dans le noyau de l'opérateur \mathcal{B} .*

La relation (4.51 page 132) montre que l'interprétation géométrique du noyau de l'opérateur \mathcal{B} est la droite d'équation $X + B^2_1Y = C$.

4.4 Exploitation du théorème 4.3.1. Interprétation. Cas tests analytiques

On considère le domaine $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a\}$ où a est un nombre réel strictement positif. L'application $\vec{\Psi}(x, y) = (x, y, xy)$ paramétrise la surface S . On pose $\Sigma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = a - x\}$, $\Sigma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$, $\Sigma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$. Les coefficients de la seconde forme fondamentale sont :

$$b_{11} = b_{22} = 0, b_{12} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

Les seuls symboles de Christoffel non nuls sont alors :

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{y}{1+x^2+y^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{x}{1+x^2+y^2}.$$

Si on se donne des champs de forces définis de la manière suivante :

$$(4.53) \quad (f^1, f^2) = (-\delta_{x_0}, 0) \in \hat{V}^{0'} \text{ et } f^3 = 0 \in H^1$$

les équations concernant les composantes T^{11} et T^{22} sont complètement découplées.

$$(4.54) \quad \begin{cases} \partial_1 T^{11} + \Gamma_{12}^2 T^{11} = \delta_{x_0}, \\ \partial_2 T^{22} + \Gamma_{12}^1 T^{22} = 0, \\ T^{11} = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \\ T^{22} = 0 \text{ sur } \Sigma_1. \end{cases}$$

d'où

$$(4.55) \quad \begin{cases} T^{11}(x, y) = \frac{\sqrt{1+y^2+x_0^2}H(x-x_0) + \sqrt{1+y^2+y_0^2}H(y-y_0)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \\ T^{22}(x, y) = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

où

$$(4.56) \quad H(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \geq 0, \\ -\frac{1}{2} \text{ si } x \leq 0. \end{cases}$$

Nous voyons que la singularité ne s'est pas reportée sur T^{22} . Reportant les expressions des composantes T^{11} et T^{22} dans (4.45(1)), (4.45(2)), nous notons que le couplage transporte les singularités. De même le système (4.45(1)), (4.45(2)) devient

$$(4.57) \quad \begin{cases} \partial_1 u_1 = B_{1111} \frac{\sqrt{1+y^2+x_0^2}H(x-x_0) + \sqrt{1+y^2+y_0^2}H(y-y_0)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \\ \partial_2 u_2 = B_{2211} \frac{\sqrt{1+y^2+x_0^2}H(x-x_0) + \sqrt{1+y^2+y_0^2}H(y-y_0)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \\ u_1 = 0 \text{ sur } \Sigma_2, \\ u_2 = 0 \text{ sur } \Sigma_3. \end{cases}$$

Les composantes (u_1 et u_2) sont donc de la forme

$$(4.58) \quad \begin{cases} u_1(x, y) = F_1(x, y) + G_1(x, y)H(y - y_0) \text{ dans } \Omega, \\ u_2(x, y) = F_2(x, y) + G_2(x, y)H(x - x_0) \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

pour le saut de u_1 on a

$$[[u_1]](x) = G_1(x, y_0)\sqrt{(1 + x^2 + y_0^2)}[[T^{11}]](x)$$

d'où le couplage entre $[[u_1]]$ et $[[T^{11}]]$.

Sur cet exemple nous voyons donc clairement que c'est la conjonction des conditions aux limites et des couplages des équations et des inconnues qui produit le phénomène de pseudo réflexion. Le couplage joue un rôle fondamental dans ce qui ressemble beaucoup à une réflexion (cf. figure 4.4 page 115).

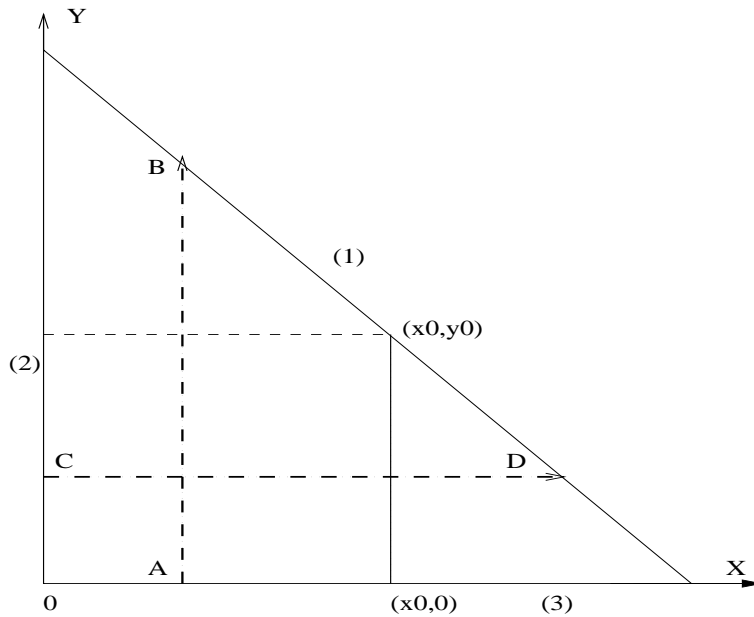


FIG. 4.10 – Domaine de référence utilisé

Les graphiques (cf. figure 4.11 page 136) montrent qu'il est possible d'approcher les phénomènes de pseudo réflexion dans de très bonnes conditions. Sur les figures 4.11 (cf. page 136) , nous remarquons que la singularité de l'inconnue u_1 (resp. u_2) le long de $[AB]$ (resp. $[CD]$) n'affecte pas l'inconnue u_2 (resp. u_1), ce qui est conforme au théorème. À la vue des courbes on a tendance à dire qu'il y a réflexion, mais ce n'est pas le cas.

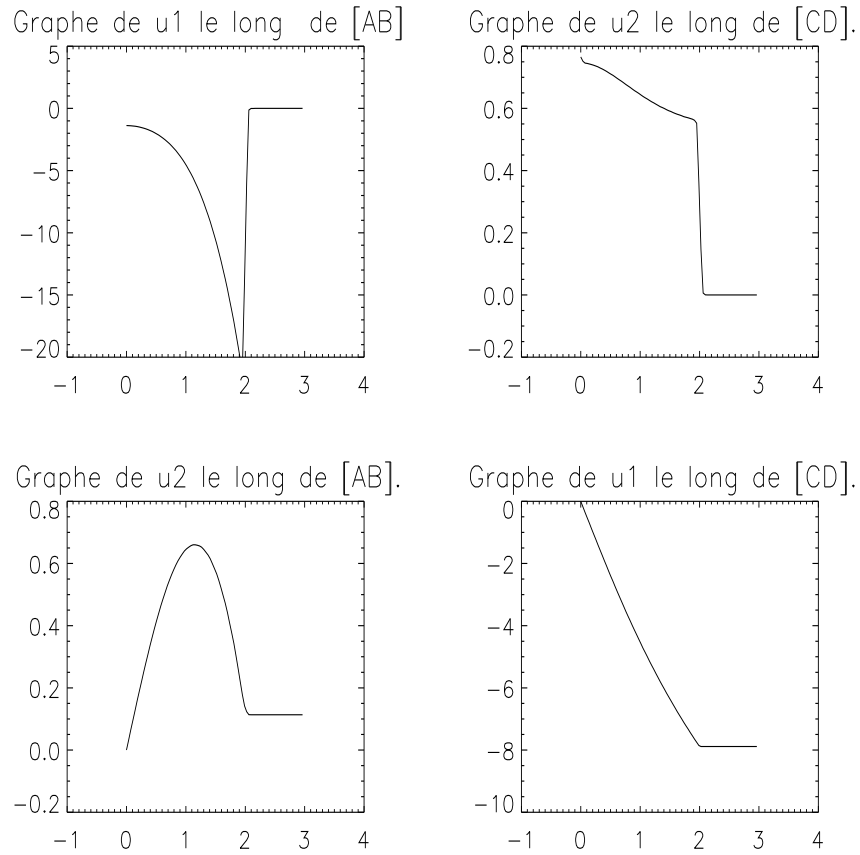


FIG. 4.11 – Coupes des solutions le long de $[AB]$ et $[CD]$

4.5 Exploitation du théorème 4.3.3. Interprétation. Cas tests analytiques

Nous considérons le domaine $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leq a\}$ où a est un nombre réel strictement positif (cf. figure 4.12 page 140). L'application $\vec{\Psi}(x, y) = (x, y, xy)$ paramétrise la surface S . Nous désignons respectivement chacune des frontières par :

$$(4.59) \quad \begin{cases} \Sigma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = a - x\}, \Sigma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x - a\}, \\ \Sigma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -x - a\}, \Sigma_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x + a\}. \end{cases}$$

Les coefficients de la seconde forme fondamentale sont :

$$b_{11} = b_{22} = 0, b_{12} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

Les seuls symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}.$$

On se donne des champs de forces tels que $\vec{f} = (f^1, f^2, 0) \in \hat{V}^{o'} \times H^1(\Omega)$ et $T^{\alpha\beta} n_{\alpha\beta} = 0$ sur une des frontières que l'on précisera. Alors le premier système hyperbolique (4.44), concernant les composantes T^{11} et T^{22} se découple complètement et donne le système suivant :

$$(4.60) \quad \begin{cases} -(\partial_1 T^{11} + \Gamma_{12}^2 T^{11}) = f^1, \\ -(\partial_2 T^{22} + \Gamma_{12}^1 T^{22}) = f^2, \\ T^{11} n_1 = 0 \text{ sur } \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4, \\ T^{22} n_2 = 0 \text{ sur } \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4. \end{cases}$$

Pour étudier cet exemple nous construisons le champ de déplacements suivant :

$$(4.61) \quad \vec{u} = \begin{cases} u_1 = \phi(x, y)^2 H(y - y_0) \\ u_2 = \phi(x, y) \\ u_3 \text{ construite à l'aide de la formule} \end{cases}$$

où on a posé :

$$(4.62) \quad \phi(x, y) = ((x^2 - y^2)^2 - 2a^2(x^2 + y^2) + a^4) \text{ de trace nulle sur } \Sigma$$

$$(4.63) \quad \phi(x, y) = ((x - y)^2 - a^2)(x + y + a) \text{ et trace de } \phi_{|\Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4} = 0$$

$$(4.64) \quad H(y - y_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq y_0, \\ -1 & \text{si } y \leq y_0. \end{cases}$$

L'expression des composantes (f^1, f^2) sont alors :

$$(4.65) \quad \vec{f} = \begin{cases} f^1 = -((\partial_1(\hat{A}^{1111} E_{11}) + \Gamma_{12}^2 \hat{A}^{1111} E_{11}))H(y - y_0) - \partial_1(\hat{A}^{1122} E_{22}) \\ \quad - \Gamma_{11}^2 \hat{A}^{1122} E_{22}, \\ f^2 = -((\partial_2(\hat{A}^{2211} E_{11}) + \Gamma_{12}^1 \hat{A}^{2211} E_{11}))H(y - y_0) - \partial_2(\hat{A}^{2222} E_{22}) \\ \quad - \Gamma_{22}^1 \hat{A}^{2222} E_{22} - [|\hat{A}^{2211} E_{11}|]\delta(y - y_0), \\ f^3 = 0 \text{ par hypothèse.} \end{cases}$$

Remarques 4.5.1 À propos des traces des fonctions utilisées.

1. La trace des composantes tangentielles (u_1, u_2) est nulle pour le choix (4.62 page 138) de la fonction $\phi(x, y)$ alors qu'avec le choix (4.63 page 138) les composantes tangentielles n'ont une trace nulle que sur $\Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$.
2. Le saut de u_1 pour le choix (4.62 page 138) est :

$$[[u_1]](x) = 2((x^2 - y_0^2)^2 - 2a^2(x^2 + y_0^2) + a^4)^2.$$

Par ailleurs, ce saut est nul lorsque x tend vers $a - y_0$, c'est-à-dire dès lors que l'on se rapproche de la frontière Σ_1 (cf. figure 4.12 page 140). En revanche avec le choix (4.63 page 138) le saut de u_1 est :

$$[[u_1]](x) = 2[(x - y_0)^2 - a^2](x + y_0 + a^4)^2$$

et celui-ci contrairement au précédent ne s'annule pas lorsque x tend vers $a - y_0$.

3. Les expressions des composées T^{11} et T^{22} sont, sachant que :

$$(4.66) \quad \begin{cases} E_{11} = 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} H(y - y_0), \\ E_{22} = 2\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}. \end{cases}$$

$$(4.67) \quad \begin{cases} T^{11} = 2(\hat{A}^{1111} \frac{\partial \phi}{\partial x} H(y - y_0) + \hat{A}^{2211} \frac{\partial \phi}{\partial y}) \phi, \\ T^{22} = 2(\hat{A}^{2211} \frac{\partial \phi}{\partial x} H(y - y_0) + \hat{A}^{2222} \frac{\partial \phi}{\partial y}) \phi. \end{cases}$$

Pour le choix (4.62 page 138) les composantes T^{11} et T^{22} s'annulent sur les frontières $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$. Pour le choix (4.63 page 138) les composantes T^{11} et T^{22} s'annulent sur les frontières $\Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4$

À présent nous imposons sur la frontière Σ_1 la relation affine $u_1 + u_2 = C$ où C est une constante positive donnée. Pour le choix (4.62 page 138) de la fonction ϕ aucun phénomène de réflexion n'a lieu bien que la première composante du champ tangentiel des déplacements présente une discontinuité (cf. théorème 4.3.3 page 130). En effet le saut u_1 est nul et satisfait la relation suivante $-[[u_1]] + [[u_2]] = 0$ ce qui entraîne que $[[u_2]] = 0$. Si l'on fait le choix (4.63 page 138) pour la fonction ϕ le phénomène de réflexion apparaît. Cette réflexion se fait le long de la frontières Σ_1 , propagée le long de la caractéristique (Δ) d'équation $x = x_0$. Dans ce cas au point E de coordonnées $(x_0 = a - y_0, y_0)$ nous avons la quantité suivante : $[[u_1]] = 8a^2[(a - 2y_0^2) - a^2]^2 \neq 0$ (cf. théorème 4.3.3 page 130). Le saut de u_1 n'étant pas nul, la discontinuité se reporte sur u_2 d'où réflexion.

Il est intéressant de poursuivre l'exemple avec le choix (4.63 page 138). Nous imposons toujours la relation linéaire $u_1 + u_2 = C$ sur la frontière Σ_1 mais cette fois on

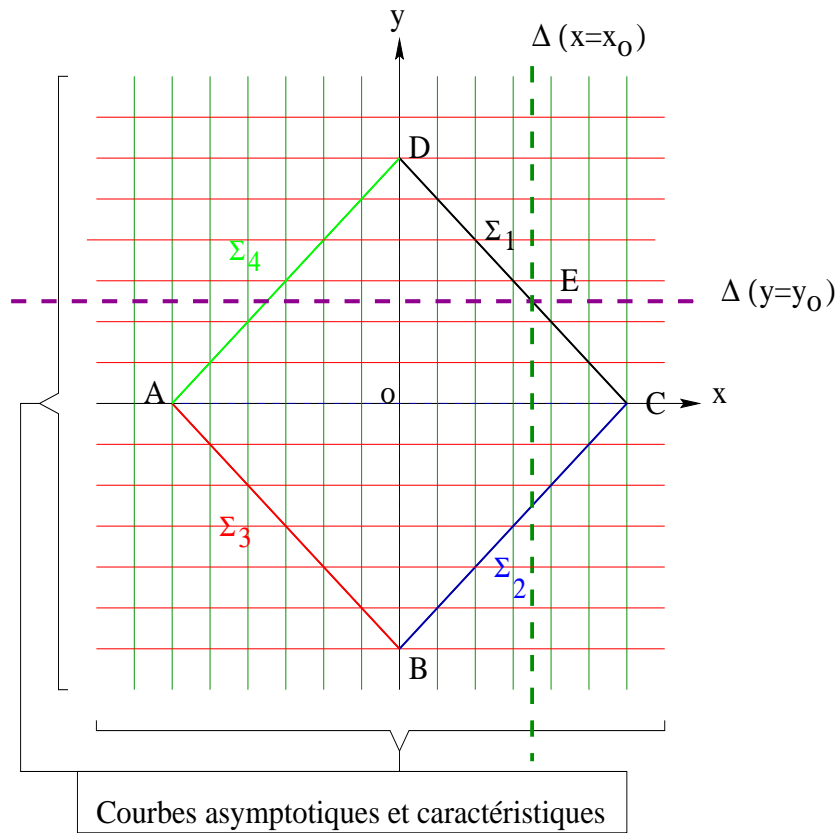


FIG. 4.12 – Domaine de référence avec les discontinuités d'équations respectives : $x = x_0$ et $y = y_0$

libère la frontière Σ_2 . Il est à noter que la surface est toujours rigide dans ce cas. Le caractère rigide est maintenu grâce à la relation linéaire. On constate que la propagation à toujours lieu le long de la caractéristique (Δ) d'équation $x = x_0$. Cette propagation se traduit par la perturbation de la seconde composante du champ de déplacements. Dans ce cas précis il est possible alors de calculer le nouveau champ de déplacements. En effet, soit $\vec{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ le nouveau champ de déplacements tangentiel c'est-à-dire, en tenant compte de la relation linéaire,

$$(4.68) \quad \begin{cases} \tilde{u}_1(x, y) \equiv u_1(x, y) \text{ comme précédemment,} \\ \tilde{u}_2(x, y) \equiv u_2(x, y) + \Theta(x)\tilde{H}(x - x_0) \end{cases}$$

avec

$$(4.69) \quad \begin{cases} [|\Theta|]_{|x=x_0}(x) = [u_1]_{|y=y_0}, \\ \tilde{H}(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-a, 0] \\ -2 & \text{si } x \in [0, x_0] \\ 0 & \text{si } x \in [x_0, a] \end{cases} \end{cases}$$

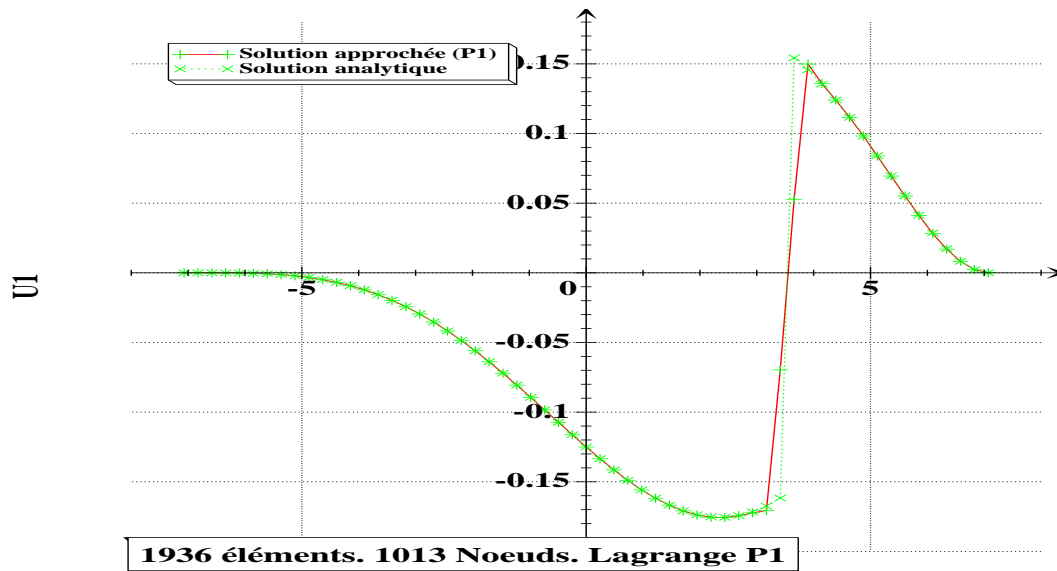
Le calcul de l'expression analytique de \tilde{u}_2 , est très simple. Nous savons par hypothèse que $u_1 + u_2 = C$, or une paramétrisation évidente de Σ_1 est donnée par : $\Sigma_1 = \{x \in [0, a] ; (x, a - x)\}$. Transcrivons alors la relation $u_1 + u_2 = C$ à l'aide de ces nouvelles coordonnées. Ceci nous donne pour la composante u_2 :

$$(4.70) \quad \begin{cases} \begin{cases} u_2(x, a - x) = -u_1(x, a - x) = 4a^2((2x - a^2) - a^2)H(x - x_0) \\ \text{pour } x \in [0, a] \end{cases} \\ \begin{cases} u_2(x, a - x) = 4a^2((2x - a^2) - a^2)H(x - x_0)Y(x) \\ \text{pour } x \in [-a, a] \end{cases} \\ \text{avec } Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Or $u_2(x, y) + \Theta(x)\tilde{H}(x - x_0)$ avec $\tilde{u}_2(x, y)|_{\Sigma_1} = -u_1(x, y)|_{\Sigma_1}$ d'où l'on déduit l'expression de $\Theta(x)$ et de $\tilde{H}(x - x_0)$:

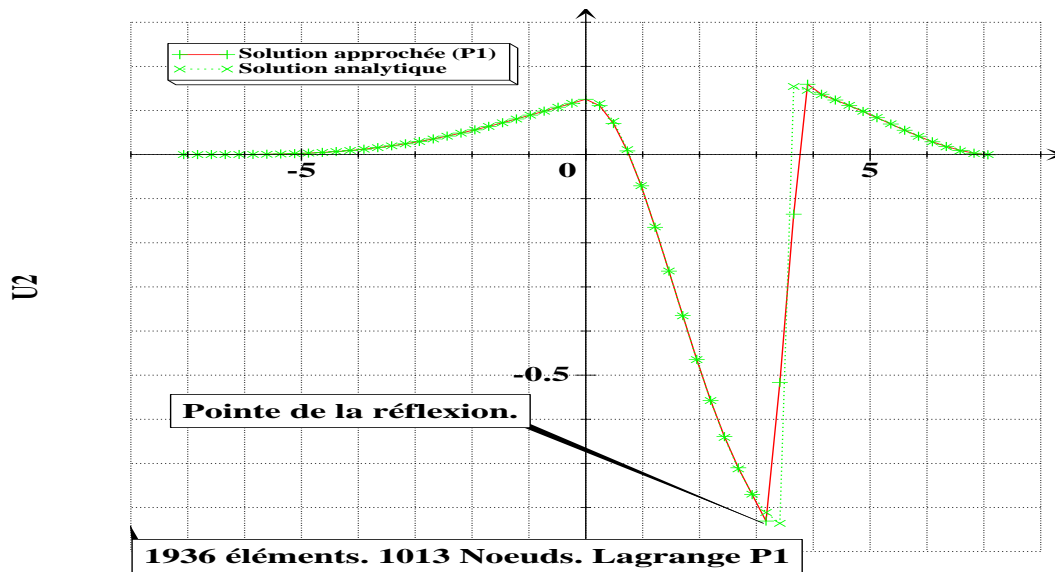
$$(4.71) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta(x) = 4a^2((2x - a)^2 - a^2)^2, \\ \tilde{H}(x - x_0) = [H(x - x_0) - 1]Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-a, 0] \\ -2 & \text{si } x \in [0, x_0] \\ 0 & \text{si } x \in [x_0, a] \end{cases} \end{array} \right.$$

Par ailleurs au point E de coordonnées $(a - y_0, y_0) \equiv (x_0, a - x_0)$ nous avons : $-[[\tilde{u}_1]](x_0) = -8a^2((2x_0 - a)^2 - a^2)^2$ et $[[\tilde{u}_2]](x_0) = 8a^2((2x_0 - a)^2 - a^2)^2$, d'où l'on trouve $-[[\tilde{u}_1]](x_0) + [[\tilde{u}_2]](x_0) = 0$ c'est-à-dire qu'il y a bien propagation (cf. théorème 4.3.3 page 130). Sur les figures 4.14 (cf. page 143) nous avons comparé les solutions numériques et analytiques. Les solutions numériques ont été calculées par la programmation du problème limite réduit avec des éléments P_1 (cf. section 3.2 page 72). Nous poursuivons l'exemple, en plus de la première relation linéaire sur Σ_1 , nous imposons la relation $u_1 + u_2 = 0$ sur Σ_2 . La surface est encore rigide. Les relations linéaires transportent les conditions aux limites. La figure 4.15 (cf. page 143) illustre le phénomène de réflexion agissant sur la composante u_1 le long de la caractéristique $y = -y_0$.



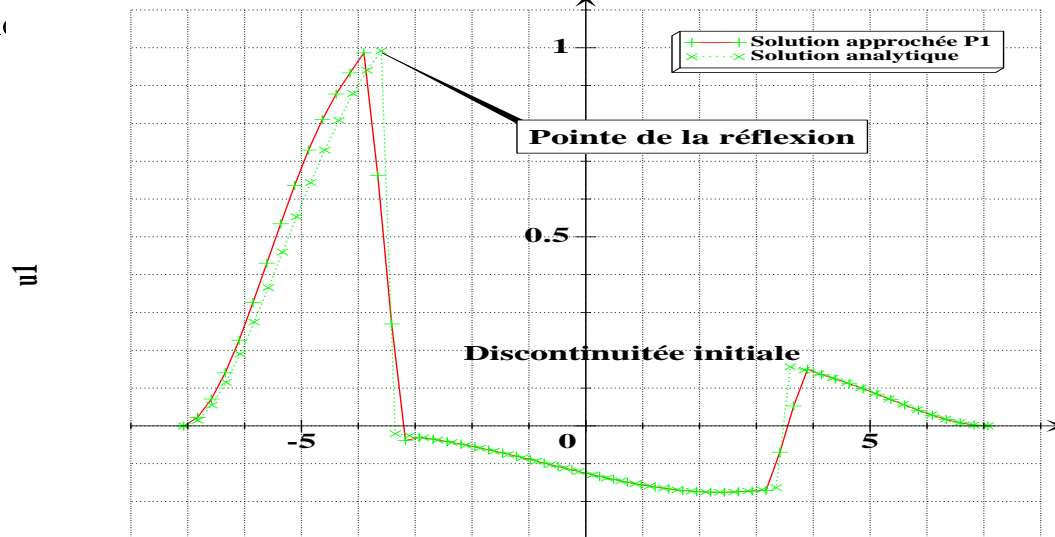
Comparaison entre solutions analytique et approchée sur [AB]

FIG. 4.13 – Comparaison entre solutions analytique et approchée de u_1 sur [AB].



Comparaison entre solutions analytique et approchée sur [CD]

FIG. 4.14 – Comparaison entre solutions analytique et approchée u_2 sur [CD]. Réflexion



Comparaison entre solution analytique et approchée sur [CD]

FIG. 4.15 – Comparaison entre solutions analytique et approchée u_1 le long de [CD]. Réflexion le long de $y = -y_0$

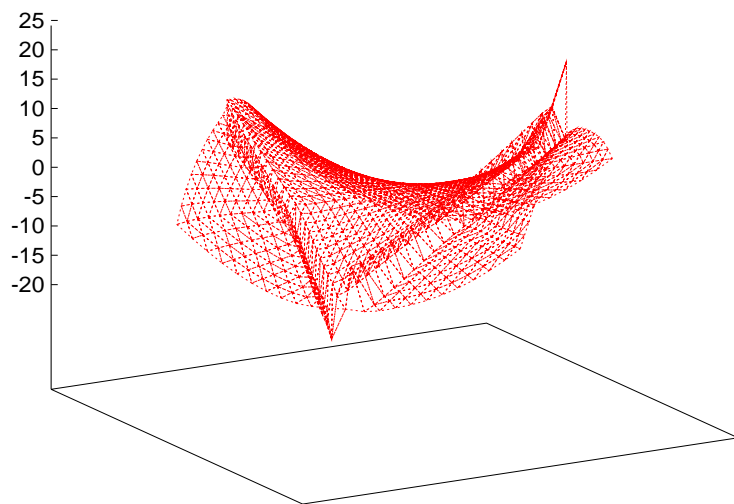


FIG. 4.16 – Visualisation de la surface sous la contrainte $u_1 + u_2 = 0$ sur Σ_1 et Σ_2 .

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les phénomènes de réflexions aux frontières d'un point de vue mathématiques. Afin de bien comprendre le phénomène des réflexions il est impératif d'introduire une définition claire et précise de ce qu'on entend par réflexion. La définition 4.3.1 (cf. page 128) précise la distinction qu'il y a lieu de faire entre réflexion au sens classique du terme et ce que nous avons appelé pseudo réflexion. Le théorème 4.3.1 (cf. page 129) établit de manière précise qu'en l'absence de conditions affines, ce qui est le cas des coques, il n'y a jamais de réflexion mais des pseudo réflexions alors que le théorème 4.3.3 (cf. page 130) montre qu'en présence des conditions affines, ce qui n'est pas licite pour les coques, nous avons affaire à des réflexions pour les systèmes hyperboliques. Les différents tests numériques mettent en évidence la difficulté à distinguer le phénomène de réflexion et de pseudo réflexion. Ce n'est qu'après avoir étudié les conditions aux limites du système hyperbolique que l'on pourra affirmer qu'il s'agit d'un phénomène de réflexion ou non. Par ailleurs, les tests numériques illustrent que les éléments finis de type P_1 sont très bien adaptés pour approcher les solutions même si celles-ci présentent des discontinuités.

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes restreint aux cas des coques hyperboliques inhibées. Nous avons mis en évidence, d'une part, l'existence d'une relation entre l'épaisseur de la coque et le pas de maillage, d'autre part, nous avons établi la faiblesse du calcul par éléments finis, (due à la rigidité des éléments d'Argyris et Ganev) pour le calcul des données présentant des discontinuités.

Dans ce mémoire, nous avons mis au point un code de calcul adapté pour le problème limite réduit concernant les coques hyperboliques, elliptiques et paraboliques inhibées. Nous avons établi qu'il est possible d'établir des critères de convergence pour le dit problème limite réduit. Nous avons montré, ceci uniquement pour les coques hyperboliques inhibées, que les éléments finis de Lagrange de type P1 et P2 sont très efficaces aussi bien pour des solutions régulières que pour des solutions présentant des discontinuités.

Par ailleurs, nous avons établi, que pour les conditions aux limites cinématiques admissibles pour les coques, il ne pouvait y avoir réflexion au sens usuel. On assiste à des phénomènes que nous qualifions de pseudo réflexion liés au couplage des équations et des inconnues dans le système membranaire.

À la question *est-il licite de substituer aux équations des coques les équations membranaires pour le calcul numérique des coques inhibées lorsque l'épaisseur tend vers zéro ?*, nous répondons par l'affirmative si les forces extérieures sont dans l'espace $(V^o)'$.

Les extensions prévues de notre travail concernent plusieurs domaines.

- Calcul des couches limites mises en évidence dans ce mémoire.
- Adaptations des résultats concernant les réflexions avec validation du code de calcul pour les coques avec arêtes.

Bibliographie

- [1] M. BERNADOU. Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces. Masson, 1994.
- [2] M. BERNADOU and P.G. CIARLET. Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de w.t. koiter, in computing methods in applied sciences and engineering. (R, GLOWINSKI and J.L. LIONS ed.). Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 134, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [3] H. BREZIS. Analyse Fonctionnelle. Masson, Paris, 1983.
- [4] D. CHOÏ. On geometrical rigidity of surfaces. application to the thory of thin linear elastic shells. Math. Models and Methods in applied Sciences, vol 7, N. 4 p.507-555, 1997.
- [5] P.G. CIARLET. The finite element method for elliptic problems. North-Holland, Amsterdam., 1978.
- [6] P.G. CIARLET and V. LODS. Analyse asymptotique des coques linéairement élastique. coques membranaires. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 318, p.863-868, 1994.
- [7] P.G. CIARLET and E. SANCHEZ-PALENCIA. un théorème d'existence et d'unicité pour les coques membranaires. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 317, p.801-805, 1993.
- [8] J.J. CONNOR and C. BREBIA. Stiffness matrix for shallow rectangular shell elements. Proc. ASCE93, EM5,43-65, 1967.
- [9] R. COURANT and D. HILBERT. Methods of Mathematical Physics Vol. 2. Interscience, New-York, 1962.
- [10] G. DARBOUX. Théorie générale des surfaces, Vol4. Gauthier-Villars, Paris, 1896.
- [11] R. DAUTRAY and J. L. LIONS. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et le techniques. Masson, paris, 1997.
- [12] P.L. GEORGE. Génération automatique de maillages. Applications aux méthodes d'éléments finis. Masson, 1991.
- [13] A. L. GOLDENVEIZER. Theory of elastic thin shells. Pergamon, New-York, 1962.
- [14] J. HADAMARD. La théorie des équations aux dérivées partielles. Éditions scientifiques, Pékin., 1964.

- [15] L. HÖRMANDER . Linear partial differential operators. Springer, 1963.
- [16] L. HÖRMANDER. On the existence and regularity of solutions of linear pseudo-differential equations, *l'enseignement math.*, 1971 pp.99-163. Regional Conference Series in Math., No.17, Providence, R. I., 1973.
- [17] A. KAMOULAKOS. A catenoidal patch test for the inextensional bending of thin shell finite elements. Comp. Meth. Appl. Mech. Engin., p. 443-452., 1994.
- [18] W. KANOK NUKALCHAI. A simple and efficient finite element for general shell analysis. Internat. J. Numer. Methods Engrg Vol. 14, pp. 179-200, 1979.
- [19] P. KARAMIAN. Nouveau résultats numériques concernant les coques minces hyperboliques inhibées : cas du paraboloid hyperbolique. Compt. Rend. Acad. Sci. tome II 326. 755-760, 1998.
- [20] P. KARAMIAN. Réflexion des singularités dans les coques hyperboliques inhibées. Compt. Rend. Acad. Sci. tome II 326. 609-614, 1998.
- [21] L. KLINGENBERG. A course in Differential Geometry. Springer-Verlag, 1981.
- [22] W.T. KOITER. On the foundations of the linear theory of thin elastic shells. Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. B73, pp. 169-195, 1970.
- [23] A. LICHNEROWICZ. Éléments de calcul tensoriel. Armand Colin, Paris, 1960.
- [24] J.L. LIONS. Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Springer, 1961.
- [25] J.L. LIONS. Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles. Presse de l'Université de Montréal., 1967.
- [26] J.L. LIONS. Perturbations singulières dans les problèmes aux limites, Lectures Notes in mathematics, Vol 323. Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [27] A.E.H.. LOVE. A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover, New-York, 1944.
- [28] A. MAJDA and S. OSHER. Reflection of singularities at the boundary. Comm. Pure Appl. Math., Vol. 28, pp. 457-478., 1975.
- [29] J.L. MEEK and H.S. TAN. A faceted shell elements with loof nodes. Internat. J. Numer. Methods Engrg Vol. 23, pp. 49-67, 1986.
- [30] B. MIARA and E. SANCHEZ-PALENCIA. Asymptotic analysis of linearly elastic shell. Asympt. Anal., 12, p.41-54, 1996.
- [31] J. NECAS. Équations aux dérivées partielles. Presse de l'Université de Montréal., 1966.
- [32] R. NIORDSON. Shell theory. North-Holland, Amsterdam., 1985.
- [33] L. NIRENBERG. Lectures on linear partial differential equations. Regional Conference Series in Math., No.17, Providence, R. I., 1973.
- [34] P.A. RAVIART and J.M. THOMAS. Introduction à l'analyse numérique et équations aux dérivées partielles. Masson, paris, 1983.

-
- [35] J. SANCHEZ-HUBERT and E. SANCHEZ-PALENCIA. Coques élastiques minces, propriétés asymptotiques. MASSON, 1997.
- [36] E. SANCHEZ-PALENCIA. Statique et dynamique de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 309, série I, p. 411-417 et 531 et 537, 1989.
- [37] E. SANCHEZ-PALENCIA. Passage à la limite de l'élasticité tridimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 311, série II, p. 909-916, 1990.
- [38] L. SCHWARTZ. Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1961.
- [39] M. SPIVAK. A comprehensive introduction to differential geometry. Perish, Houston, 1975.
- [40] J. STOCKER. Differential geometry. Wiley, New-York, 1969.
- [41] J.J. STRUIK. Lectures on classical differential geometry. Addison-Wesley, 1961.
- [42] M. TAYLOR. Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations. Comm. Pure Appl. Math., Vol. 28, pp. 457-478., 1975.
- [43] F. TRÈVES. Cours sur les équations aux dérivées partielles linéaires. (I.H.P. 65-66) secrétariat mathématiques de l'ENS., 1965.
- [44] K. YOSIDA. Functional analysis. Springer, Heidelberg, 1971.

Index terminologique

- Argyris Ganev, 31–164
 Asymptote, 31–164
 Asymptotique, 7, 31–164
 Caractéristique, 73–124
 Caractérisation des Surfaces, 1–29
 Caractéristique, 21, 22, 24, 31–73, 125–164
 Conforme, 73–124
 Convergence, 31–164
 Coque, i, 166
 Courbure K , 31–164
 D.K.T., 31–164
 Discontinuité, 73–164
 Elements finis P1, 73–164
 Elements finis P2, 73–164
 Elements finis P3, 73–124
 Hilbert, 73–124
 Hyperbolique, 1, 7, 8, 10, 31–164
 Inhibé, 1, 13, 14, 31–164
 Leibnitz, 73–124
 Lignes coordonnées, 31–164
 Maillage, 31–164
 Mince, 1–29, 31–73
 Non conformes, 73, 73 – –124
 Opérateur, 73–164
 Optimal, 31–164
 Parabolöide Hyperbolique, 31–164
 Pas de maillage \mathbf{h}_o , 35, 36, 38–40, 53, 69
 Pas de maillage \mathbf{h}_{No} , 41
 Pas de maillage \mathbf{h}_{To} , 41
 Pas de maillage \mathbf{h} , 34, 38, 40, 41
 Problème limite, 1–29, 73–124
 Problème limite réduit, 1–29, 73–124
 Propagation, 73–164
 Pseudo réflexion, 73–164
 Réflexion, 73–164
 Relations affines, 73–164
 Rigide, i, 166
 Rigidité, i, 166
 Semi-normes, 73–124
 Singularité, 73–164
 Sobolev, 73–124
 Stabilité, 31–164
 Surface, i, 166
 Système rigide, i, 166
 Systèmes différentiels Hyperboliques, 73–164
 Systèmes différentiels linéaires, 73–164
 Systèmes Hyperboliques, 73–164
 Systèmes strictement Hyperboliques, 73–164

Index des notations

- Δ , 7
 Ξ désigne le support de la singularité, 147
 ϵ , épaisseur relative, 11
 $\hat{A}^{\alpha\beta\lambda\nu}$, coefficients réduits, 20
 $(V^o)'$, dual de V^o , 15
 \mathbf{v}^ϵ , 16
 \mathbf{v}^o , 16
 (Ω, Ψ) , 1
 (C) , 4
 $(a^{\alpha\beta})$, 3
 $(a_{\alpha\beta})$, 3
 $(b^{\alpha\beta})$, 3
 $(b_{\alpha\beta})$, 3
 $\langle \mathbf{a}^\alpha, \mathbf{a}_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha$, 2
 V^o , complété de V pour la norme induite
par a_o , 14
 $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$, 4, 13
 Ω , 1
 Ψ , 1
 \mathcal{E} , 1
 \mathbf{a}_α , 1
 $\gamma_{\alpha\beta}$, 11, 12
 $\partial_\alpha \mathbf{u}$, 4
 $\rho_{\alpha\beta}$, 11, 12
 $a^{\alpha\beta}$, 12
 $a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, forme membranaire, 12
 a_0 , forme membranaire, 12
 $a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, forme de flexion, 12
 a_1 , forme de flexion, 12
 $b_{\alpha\beta}$, 13
 $q(y^1, y^2)$, 10
 \mathbf{N} , 1
 $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{N}$, base contravariante, 2
 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{N}$, base covariante, 2
 \mathbf{H} , 6
 \mathbf{K} , 6
 $\mathbf{N}_{,\alpha}$, 4
 $\mathbf{a}_{,\beta}^\alpha$, 4
 $\mathbf{a}_{\alpha,\beta}$, 4
 \mathbf{b} , 5
 \mathbf{g} , 4
 \mathbf{h}_o , 38
 \mathbf{n} , 5
 \mathbf{t} , 5, 7
 \mathbf{u} , 4
 $\Psi_{,\alpha} = \partial_\alpha \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y^\alpha}$, 1
 \mathbf{u}^o , 14
 $A^{\alpha\beta\lambda\mu}$, 12
 $S = (\Omega, \Psi)$, 8
 $A^{\alpha\beta\lambda\nu}$, 11, 12
 D_α , 17
 dS , 16
 ds , 17
 E_{11} , 19
 E_{22} , 19
 G , déplacements inextensionnels, 15
 $M^{\alpha\beta}$, 11
Pas de maillage \mathbf{h}_o , 38
 $Q(x^1, x^2)$, 10
 $Q(y^1, y^2)$, 10
 $Q(\mathbf{t})$, 7
 S , 1
 $T^{\alpha\beta}$, 11
 V , 13

Première partie

Annexes

Annexe A

Lignes de codes en C++ pour le problème limite réduit

Dans cette annexe ne figure que le programme principale "resol.cc" ainsi que le module concernant le problème limite réduit.